Christian Thiel

Sentido y referencia en la lógica de Gottlob Frege

ESTRUCTURA Y FUNCION

EDITORIAL TECNOS · MADRID

SENTIDO Y REFERENCIA EN LA LOGICA DE GOTTLOB FREGE

En los últimos años estamos asistiendo en España a un rápido aumento de los estudios dedicados a Semántica; pero la figura de G. FREGE apenas ha sido tratada en nuestra literatura y tampoco con suficiente corrección. De aquí que la presente obra de THIEL —joven miembro del Círculo de Erlangen y profundo conocedor del pensamiento del maestro— señale un camino a seguir en una investigación de tal índole.

Se puede afirmar que la Semántica encuentra en FREGE y especialmente en la obra *Ueber Sinn und Bedeutung* una de sus culminaciones. Quizá por esto la comprensión perfecta de la doctrina citada requiera cierto conocimiento previo de las teorías del juicio y de la función desarrolladas por FREGE.

El presente trabajo de THIEL tiene el considerable valor de presentar una íntima trabazón entre los estudios de Lógica y Teoría de la Ciencia en FREGE, donde se encuentran las teorías citadas en último lugar, y su concepción epistemológica. El paso entre el lenguaje formal y el natural se realiza de una manera fluida, siguiendo el curso de desarrollo de Sentido y Referencia en la obra del matemático de Jena.

Pero no es éste el único mérito de la investigación de THIEL. Aunque es difícil destacar una parte más que otra, consideramos excelentes el estudio de la reducción de la sinonimia de nombres aislados a la sinonimia de proposiciones y su conclusión desontologizadora sobre lo que son signo, Sentido y Referencia.

ESTRUCTURA Y FUNCION

El porvenir actual de la Ciencia

Colección dirigida por ENRIQUE TIERNO GALVÁN

1. QUENTIN GIBSON: *La lógica de la investigación social.*
2. M. F. ASHLEY MONTAGU: *La dirección del desarrollo humano* (2.ª ed.).
3. GUSTAV BERGMANN: *Filosofía de la ciencia.*
4. CHRISTIAN BAY: *La estructura de la libertad.*
5. ERNEST NAGEL: *La lógica sin metafísica.*
6. DAVID HILBERT y WILHELM ACKERMANN: *Elementos de lógica teórica* (2.ª ed.).
7. VERNON VAN DYKE: *Ciencia política: un análisis filosófico.*
8. KARL R. POPPER: *La lógica de la investigación científica.*
9. R. M. MARTIN: *Verdad y denotación.*
10. ERNEST GELLNER: *Palabras y cosas.*
11. C. O. BROAD: *El pensamiento científico.*
12. JOHN HOSPERS: *La conducta humana.*
13. ARTHUR PAP: *Teoría analítica del conocimiento.*
14. T. C. SCHELLING: *La estrategia del conflicto.*
15. RICHARD B. BRAITHWAITE: *La explicación científica.*
16. MILIC CAPEK: *El impacto filosófico de la física contemporánea.*
17. ROS ASHBY: *Proyecto para un cerebro.*
18. HANS REICHENBACH: *Moderna filosofía de la ciencia.*
19. GEORGE POLYA: *Matemáticas y razonamiento plausible.*
20. GEORGE L. S. SHACKLE: *Decisión, orden y tiempo.*
21. D. M. ARMSTRONG: *La percepción y el mundo físico.*
22. ERNEST NAGEL: *Razón soberana.*
23. MAX BLACK: *Modelos y metáforas.*
24. HASKELL B. CURRY y ROBERT FEYS: *Lógica combinatoria.*
25. LUDWIG WITTGENSTEIN: *Los cuadernos azul y marrón.*
26. ABRAHAM EDEL: *El método en la teoría ética.*
27. ALFRED LANDÉ: *Nuevos fundamentos de la mecánica cuántica.*
28. JEAN LADRIÈRE: *Limitaciones internas de los formalismos.*
29. N. WIENER y J. P. SCHADÉ: *Sobre modelos de los nervios, el cerebro y la memoria.*
30. G. H. VON WRIGHT: *Norma y acción. Una investigación lógica.*
31. E. NAGEL y J. P. NEWMAN: *El teorema de Gödel.*
32. HENRY MARGENAU: *La naturaleza de la realidad física.* Una filosofía de la Física moderna.
33. V. C. CHAPPELL: *El lenguaje común.* Ensayos de filosofía analítica.
34. ALF ROSS: *Lógica de las normas.*
35. WILFRID SELLARS: *Ciencia, Percepción y Realidad.*

SENTIDO Y REFERENCIA

en la

LOGICA DE GOTTLOB FREGE

AS
Madrid, Diciembre 87

ESTRUCTURA Y FUNCION
EL PORVENIR ACTUAL DE LA CIENCIA

Christian Thiel

SENTIDO y REFERENCIA en la LOGICA de GOTTLOB FREGE

EDITORIAL TECNOS

MADRID

Los derechos para la versión castellana de la obra
SINN UND BEDEUTUNG IN DER LOGIK GOTTLOB FREGES
publicada por VERLAG ANTON HAIN, Alemania,
son propiedad de
EDITORIAL TECNOS, S. A.

Traducción por
JOSE SANMARTIN ESPLUGUES

© EDITORIAL TECNOS, S. A., 1972
O'Donnell, 27. Tel. 226 29 23 - Madrid-9
Printed in Spain. Impreso en España. Dep. Legal: M. 5332-1972

SELECCIONES GRÁFICAS (EDICIONES) - Paseo de la Dirección, 52 - MADRID-29

INDICE

PREFACIO DEL AUTOR A LA VERSIÓN ESPAÑOLA ... *Pág.* 9

TERMINOLOGÍA ... 11

ABREVIATURAS USADAS ... 13

INTRODUCCIÓN ... 15

1.1. LA IDEA DE LA CONCEPTOGRAFÍA ... 17

1.2. NÚMERO Y CONCEPTO ... 35

1.3. LA JERARQUÍA DE FUNCIONES ... 55

1.4. CURSOS DE VALORES Y PROBLEMA DE AMPLIACIÓN ... 69

2.1. EL ARTÍCULO "UEBER SINN UND BEDEUTUNG" ... 93

2.2. DESCRIBIR, DESIGNAR, ASEVERAR ... 111

2.3. SINONIMIA Y CONTEXTO PROPOSICIONAL ... 127

2.4. LA CONTAMINACIÓN DE ONTOLOGÍA Y SEMÁNTICA ... 151

SUMARIO ... 167

BIBLIOGRAFÍA ... 171

PREFACIO DEL AUTOR A LA VERSION ESPAÑOLA

La presente versión española de mi estudio sobre FREGE *contiene diversas correcciones del texto original, que agradezco, ante todo, a los señores Prof. Víctor H. Dudman, Gottfried Gabriel, profesor Reinhardt Grossmann y doctor Rudolf Kötter. Ciertas adiciones, que introduje ya en la traducción inglesa de mi libro, se hallan incluidas también en la publicación española; me refiero, en particular, a la Bibliografía. La Editorial Tecnos tiene el mérito no sólo de haber hecho una cuidada presentación de la obra, sino también de haber acogido favorablemente las propuestas del autor y del traductor.*

Este trabajo, que, como resultado de unos cuantos años de estudio, fue presentado como Tesis Doctoral en la Facultad de Filosofía de la Universidad Friderico-Alexandrina en Erlangen, contó en su día no sólo con la protección de la fundación Fritz Thyssen, al conceder al autor una beca de dos años, sino también con apoyos personales que deben agradecerse en este lugar. Mi mayor agradecimiento es para mi respetado maestro, profesor Rudolf Zocher, por sus siempre comprensivos consejos y el interés constante depositado en mi labor. Por sus consejos y críticas fructíferas doy las gracias al profesor Paul Lorenzen, en torno al cual (y a su colega profesor Wilhelm Kamlah) se comenzó a constituir —por el tiempo en que se redactaba este libro— la "Escuela de Erlangen", que ha alcanzado entre tanto gran influencia, y al cual agradezco asimismo la posibilidad que me dio de trabajar unos cuantos años, en dicho período, como su ayudante en Erlangen. Al profesor Wilhelm Britzelmayr (Munich) agradezco su muy amable permiso para acceder a copias de fragmentos importantes de la obra científica póstuma de Frege —en un tiempo en que los originales sólo estaban al alcance de unos pocos elegidos. Reproduzco citas de dichos textos en mi obra con la conformidad del profesor Hans Hermes (hoy en Friburgo y entonces director del Institut für mathematische Logik und Grundlagenforschung en Münster), hecho por el que le estoy muy agradecido.

La aparición de una versión española de este libro me causa profunda alegría. Mi agradecimiento es, ante todo, para el profesor Manuel Garrido, director del Departamento de Lógica y Filosofía de la Ciencia de la Universidad de Valencia y organizador del Primer Simposio de Lógica y Filosofía de la Ciencia, que del 22 al 24 de abril de 1969 tuvo lugar en Valencia y que me permitió conocer el trabajo sugestivo que el "Círculo de Valencia" lleva a cabo en el campo de la Filosofía Científica; sin los esfuerzos del profesor Garrido no se hubiera llevado a cabo jamás de modo tan rápido la traducción de este estudio sobre FREGE.

El profesor Garrido tiene el mérito, asimismo, de haber propuesto en

la persona del profesor J. Sanmartín Esplugues a un traductor de honda formación metodológico-filosófica. Siguiendo fielmente, en unos lugares, el original alemán, aunque sin incurrir en germanismos, y reproduciendo de modo perfecto el sentido de lo dicho en otros (en que la sintaxis alemana o los ejemplos usados impedían la versión literal), el profesor Sanmartín no sólo ha refutado el prejuicio de que traducción y pensamiento creador se excluyen, sino también ha facilitado al autor la designación de "autorizada" a la presente versión. Como el contenido —cosa que está en la esperanza del autor—, así también el tipo de traducción contribuirá a que este libro, en el mundo de habla española, no sólo gane nuevos adeptos del estudio de los grandes lógicos alemanes, sino asimismo del "pensamiento metódico", del que la humanidad se encuentra tan necesitada en este tiempo caótico.

CHRISTIAN THIEL

Erlangen, julio 1970.

TERMINOLOGIA

La presente tabla tiene una doble finalidad: favorecer al lector la comprensión del texto que sigue y, en la medida de lo posible, acuñar una terminología en el campo de la literatura española dedicada a los escritos de FREGE. En ella sólo se han expresado los términos más característicos de la obra del inmortal pensador germano.

Bedeutung	en sentido amplio: Significado. en sentido estricto: Referencia *.
Begriffsschrift	conceptografía **.
bezeichnen	designar.
das Falsche	lo Falso.
Gedanke	Pensamiento.
(un) gesättigt	(in) saturado.
(un) gleichstufig	(no) homogéneo.
Sinn	Sentido *.
das Wahre	lo Verdadero.
Wertverlauf	curso de valores ***.

* El término "Bedeutung", en sentido estricto, ha sido traducido frecuentemente por (1) "denotación" y (2) "nominatum", así como "Sinn" lo ha sido por (3) "significación" y (4) "connotación"; pero (1) y (4) han sido demasiado maltratados por la filosofía española, (3) puede confundirse fácilmente con "significado" y, finalmente, (2), como término de CARNAP, no creo que deba trasladarse a FREGE.

** Esta traducción será siempre la de *Begriffsschrift,* cuando no se refiera al título de la obra de FREGE de 1879, sino a su contenido, i.e., al sistema de signos en ella establecido. Es frecuente encontrar en la literatura española especializada en este tema otras traducciones, como "escritura conceptográfica", "escritura conceptual" o "ideografía". Rechazo la primera traducción por ser redundante; la segunda, porque usando una sola palabra, como "conceptografía", estamos más cerca del original alemán, y la tercera, porque puede inducir a confusiones, ya que FREGE diferencia claramente entre "Begriff" (="concepto") y "Vorstellung" (="*idea*", "imagen" o "representación").

*** La traducción de este término es, quizá, la más difícil. I. Angelelli, en la obra traducida y editada por él de B. V. BIRJUKOV *(Two Soviet Studies on Frege,* Reidel Publ. Comp., Dordrecht, Holland, 1968) pro-

pone dos traducciones: "range of values" y "value-range of a function". Pero la traducción de "Wertverlauf" por "rango de valores" hace perder al término alemán el dinamismo que implica "Verlauf". Por ello, la duda se me centró entre "distribution of values" (J. MURPHY) y "curso de valores", que considero idóneos. El inclinarme por el último término se ha debido a la perfecta reflexión existente entre "curso" y "Verlauf".

J. SANMARTÍN ESPLUGUES

Valencia, 1970.

ABREVIATURAS USADAS

AMLG = Archiv für mathematische Logik und Grundlagenforschung
AP = Lettera del Sig. G. Frege etc. = núm. 50 *
ASB = Ausführungen über Sinn und Bedeutung = núm. 60
BP = Ueber die Begriffsschrift des Herrn Peano etc. = núm. 49
BRL = Booles rechnende Logik etc. = núm. 38
Bs = Begriffsschrift etc. = núm. 37
BuG = Ueber Begriff und Gegenstand = núm. 43
Def = Begründung etc. = núm. 61
Den = On Denoting = núm. 118
FL = Formale Logik = núm. 16.
FuB = Function und Begriff = núm. 42
Ged = Der Gedanke = núm. 57
Gef = Gedankengefüge = núm. 59
Geom III = Ueber die Grundlagen der Geometrie I (1906) = núm. 53
Geom IV = " " " " " II (1906) = "
Geom V = " " " " " III (1906) = "
Gerh. Phil. = Die philosophischen Schriften etc. = núm. 93
Gg = Grundgesetze der Arithmetik, I = núm. 45, II = núm. 51
Gl = Grundlagen der Arithmetik = núm. 40
JDMV = Jahresberichte der Deutschen Mathematiker-Vereinigung
KB = Kritische Beleuchtung etc. = núm. 47
KRV = Kritik der reinen Vernunft = núm. 84
LM = Ueber Logik in der Mathematik = núm. 64
LU I = Logische Untersuchungen = núm. 75
MaN = Meaning and Necessity = núm. 20
PA = Philosophie der Arithmetik = núm. 74
Pg = Prolegomena etc. = núm. 85
Pr = The Principles of Mathematics = núm. 116
RH = Recensión Husserl = núm. 46
SuB = Ueber Sinn und Bedeutung = núm. 44
Tr = Ueber das Trägheitsgesetz = núm. 41
Tract = Tractatus Logico-Philosophicus = núm. 144
Vern = Die Verneinung = núm. 58
WBBs = Ueber die wissenschaftliche Berechtigung etc. = núm. 39
WiF = Was ist eine Funktion? = núm. 52
ZPPK = Zeitschrift für Philosophie und philosophische Kritik, N. F.

* Los números se refieren a la Bibliografía.

INTRODUCCION

La distinción de FREGE entre el Sentido y la Referencia de una expresión lingüística encuentra una atención extraordinariamente grande en la Filosofía de la actualidad. No se puede explicar este interés como si sólo se tratase de un mero fenómeno secundario en el marco del "Renacimiento de Frege" (que hasta hace poco ha estado limitado en buena medida a los países anglosajones). Se funda más bien en la actualidad del par de conceptos freguianos que, o bien con los mismos nombres o con los de Intensión y Extensión, han demostrado su utilidad en numerosos problemas del análisis filosófico de hoy.

Esto no significa que reine un completo acuerdo sobre la legitimidad y el alcance de esta distinción. Al contrario: Por lo menos en parte, su actualidad se debe a la complejidad de la mayor parte de las cuestiones con ella enlazadas. Es más, en cuanto se quiere retrotraer la discusión a lo que el mismo FREGE intentaba decir, el problema se agrava, porque FREGE no ha presentado su distinción ni con la amplitud deseable ni, por doquier, con la claridad conveniente; de modo que son posibles discusiones duraderas y casi indecidibles sobre lo que el mismo FREGE ha pensado sobre una u otra cuestión. Debido a la elevada atención, que también encuentran las doctrinas de FREGE recientemente en Alemania, únicamente puede ser bien acogida una investigación de la teoría de FREGE sobre Sentido y Referencia, que, siendo más precisa, incluya textos póstumos de FREGE y un examen de su discusión actual.

En el presente trabajo se realiza una investigación de dicha índole. Además, en vista de la literatura secundaria existente, hemos podido renunciar a una exposición detallada de la vida y obra de FREGE, cosa necesaria todavía hace unos diez años. Sin embargo, varias razones pertinentes impiden la restricción del marco en que tratar el tema. Pues la doctrina de Sentido y Referencia no se halla aislada en el edificio total del sistema freguiano. Se encuentra relativamente independiente de ella una segunda doctrina sin cuya consideración ningún problema especial del pensamiento freguiano, en general, puede ser tratado con probabilidades de éxito y cuyas consecuencias en un sentido sistemático parecen todavía más graves: La teoría de función, concepto y objeto.

Esta situación explica la distribución del trabajo en dos partes principales que constan, cada una de ellas, de cuatro capítulos. En el primer Capítulo (1.1), tras unas pocas consideraciones sobre el motivo de su introducción, se expone la conceptografía de FREGE. Del programa del Logicismo, a cuya realización debe contribuir la conceptografía, nos ocupamos en el Capítulo 1.2, en el que, junto a la discusión de FREGE de las concepciones de KANT, MILL y HUSSERL, se tasa su contribución a la com-

prensión del Formalismo, la cual no se agota, en modo alguno, en la crítica negativa de la Aritmética formal. La doctrina de FREGE sobre el concepto y la teoría de la función, que la comprende, son el objeto del Capítulo 1.3, al que se añade en el Capítulo 1.4 una discusión minuciosa del problema, actualmente muy contendido, de los "Nombres de Curso de Valores" freguiano. Ambos capítulos brindan la ocasión de rectificar interpretaciones frecuentes de las doctrinas de FREGE en toda una serie de puntos importantes.

La teoría de Sentido y Referencia, que se ha de tratar a fin de obtener una imagen total de las doctrinas fundamentales freguianas, es tematizada en la segunda parte del trabajo. Mientras que el primer Capítulo (2.1) refiere, en lo esencial, el contenido del artículo de FREGE "Ueber Sinn und Bedeutung", el segundo (2.2) encaja ya en una discusión todavía no concluida, al ser tratadas la crítica de RUSSELL a la semántica de FREGE, la contracrítica de JONES y también las posiciones más recientes de BIERICH. Los dos restantes capítulos están dedicados, principalmente, a nuevas contribuciones. Siempre en el marco de las intenciones freguianas, en el Capítulo 2.3

(1) se realiza una reducción de la sinonimia de nombres aislados a la sinonimia de proposiciones,

(2) la tesis, actualmente muy difundida, de que FREGE sólo concede Sentido y Referencia a las palabras en el contexto proposicional, es sometida a una crítica, que conduce tanto a una restricción de la "tesis del contexto", como a una precisión de sus componentes reconocidos,

(3) se demuestra que un criterio, recientemente publicado, de la obra póstuma científica de FREGE para la sinonimia de proposiciones no sólo no es aplicable a varios ejemplos del mismo FREGE, sino que conduce además a enunciados de sinonimia que contradicen inequívocamente otras exposiciones de FREGE.

En el último Capítulo 2.4 se investigan los problemas del "platonismo" freguiano, así como su influencia en la doctrina de Sentido y Referencia. La cuestión fundamental es si FREGE logra construir una semántica pura, sin facilitar la entrada a consideraciones ontológicas extrañas al tema. Nuestra respuesta está contenida ya en el título del capítulo en términos suficientemente claros.

El presente trabajo es, ante todo, una contribución polémica. Quedará por verse si hemos logrado además avanzar algo en la clarificación definitiva de las cuestiones tratadas.

1.1. LA IDEA DE LA CONCEPTOGRAFIA

Desde que, hacia el comienzo de la Edad Moderna, la ciencia se separó de la filosofía y se diversificó en una pluralidad de ciencias autónomas, la idea de la ciencia unificada y de un método científico universal ha fascinado siempre a los pensadores principales. LEIBNIZ, con quien se comenzó a señalar la importancia no sólo de un método de inferencia más seguro y eficaz, sino también de una simbólica ajustada al progreso de la ciencia, formuló un famoso programa para la construcción de una *scientia universalis* tal. En este programa aspiraba a la creación de "una *Característica de la Razón,* gracias a la cual serían asequibles, hasta cierto punto, las verdades de la razón mediante un cálculo, como en Aritmética y Algebra, así en todo otro dominio, en tanto esté sujeto a inferencia" [1].

LEIBNIZ cree que todos los juicios tienen la forma Sujeto-Predicado y que, por consiguiente, son reducibles a conceptos. Entre éstos hay ciertos conceptos muy simples, a partir de los cuales se construyen los restantes, de modo que éstos últimos pueden obtenerse mediante la combinación o síntesis apropiadas de los primeros ("inventio"). Es importante, en primer lugar, descubrir los conceptos más simples y asignarles de una manera adecuada, según su materia o esencia, signos o caracteres, mediante los cuales sean unívocamente simbolizados o "caracterizados". Se puede ilustrar la educación, por ejemplo, en el lenguaje simbólico de la Química, en el que los elementos son designados mediante signos sencillos y las combinaciones de elementos lo son mediante combinaciones de estos signos sencillos en fórmulas estructurales. Con los caracteres ideográficos encontrados se podrá construir, entonces, un "Alfabeto del pensamiento humano", que, tras probar su irreducibilidad y completud, pueda servir de base a una *lingua sive characteristica universalis* [2].

Se ha de procurar, entonces, que también las relaciones entre las cosas sean reflejadas en relaciones entre los signos, de modo que cualquier relación entre las cosas designadas pueda ser interpretada como relación entre los signos mismos. Toda combinación de signos, que exprese una relación auténticamente existente entre cosas es un enunciado verdadero; y un método que refleje todas las relaciones auténticamente existentes en el sistema simbólico empleado es, al mismo tiempo, una "lógica inventiva" o *ars inveniendi,* que, partiendo de las relaciones más simples (Identidad y los llamados Hechos Primitivos), proporcione todas las verdades de la serie. Usualmente el paso de una verdad a otra se

---

[1] Gerh. Phil. vii 32. Bochenski, FL, 38.10.
[2] Ms. Phil. vii 185 y C 160.

efectúa en la forma de *Inferencia.* LEIBNIZ conecta el conocimiento de que "omnis humana ratiocinatio signis quibusdam sive characteribus perficitur" [3] con su convicción de la eficacia de la combinatoria: La inferencia ha de ser un cálculo inferencial, un algoritmo, un *calculus ratiocinator.* Naturalmente, las trasformaciones en un cálculo deben ser puramente formales, "vi formae", en analogía con los métodos esquemáticos, como, por ejemplo, el del Algebra, porque "*Calculus vel operatio* consistit in relationum productione facta per transmutationes formularum, secundum leges quasdam praescriptas factas" [4].

Esta característica creadora constituirá así una *Mathesis universalis,* que abarque, en particular, la Lógica y la Matemática como meras partes y que sólo limitadamente pueda ser interpretada como extrapolación de la matemática (y con toda seguridad no de la matemática entendida como teoría de la cantidad de tiempos de LEIBNIZ). LEIBNIZ dedicó su vida entera a la idea de esta *Mathesis universalis,* sin cesar de alabar sus ventajas y eficacia. No sólo sería un lenguaje exacto, superior a las lenguas nacionales y válido para todas las ciencias particulares, que redujera sistemáticamente el esfuerzo de la investigación racional en el establecimiento de las relaciones generales de los conceptos científicos. No posibilitaría tan sólo el descubrimiento de nuevas verdades en las llamadas ciencias exactas, sino que también trataría mediante el cálculo las cuestiones metafísicas y éticas, y podría resolver, como *ars iudicandi,* cualquier discrepancia, al proporcionar un método de decisión puramente formal y plenamente verificable. Su carácter cuasimecánico desterraría el error de nuestro pensamiento y con ello proporcionaría un *filum meditandi,* "quandam sensibilem et velut mechanicam mentis directionem quam stupidissimus quisque agnoscat", un *hilo de Ariadna,* que nos conduciría seguros a través del laberinto de los complejos tipos de razonamiento de las distintas ciencias [5].

El hecho de que LEIBNIZ se entusiasmara con este programa de un lenguaje universal, programa utópico y nunca realizado por él, será sólo comprensible, si se toma en cuenta el fondo histórico. Encontramos entonces un hecho histórico importante: LEIBNIZ recibe de la mística barroca la idea total de una ideografía o conceptografía. Su programa, acabado de bosquejar, se encuentra, por ejemplo, en COMENIUS de un modo tan similar que, si no estuvieramos interesados especialmente en la racionalización y matematización en LEIBNIZ, hubiéramos podido hablar asimismo de un "programa comeniano" en lugar de un "programa leibniziano". Incluso diversos términos leibnizianos, como "lingua rationalis" ya fueron usados por COMENIUS. LEIBNIZ no negó jamás esta relación. No sólo compara muy a menudo sus esfuerzos con los de COMENIUS, sino que conscientemente se siente también sucesor del *Ars Magna,* de LLULL; de la *Polygraphia nova et universalis ex combinatoria arte detecta,* de

[3] Gerh. Phil. vii 204.
[4] Ibid. 206.
[5] Gerh. Phil. vii 14. Cf. ibid. 21 s., 49, 64, 157, 198 ss.

KIRCHER, y de los lenguajes simbólicos de DALGARNO y WILKINS [6]. No se puede decir que la contribución de LEIBNIZ a estos esfuerzos haya quedado en el olvido posteriormente. En el siglo XIX KVÈT y TRENDELENBURG informan de ello en sus trabajos sobre LEIBNIZ. Con todo se podía perdonar a un LEIBNIZ lo que hubiera comprometido a un científico del siglo XIX, de modo que la ocupación en cosas de tal índole quedó como tarea de intrusos.

Esta evaluación experimentó un cambio en el siglo XIX, cuando los representantes de la nueva Lógica Matemática o Logística [7] encontraron en LEIBNIZ uno de sus precursores, al investigar los orígenes de su ciencia. Es característico de la nueva imagen de LEIBNIZ, nacida entonces (como, por ejemplo, la de LEWIS, SCHOLZ y SCHRECKER), el retroceso del punto de vista histórico frente a uno sistemático, bajo el cual los rasgos susceptibles de desarrollo del programa leibniziano son acentuados y modificados de manera totalmente apropiada. El calculus ratiocinator aparece ahora como "un método, mediante el cual la inferencia se convierte en un cálculo", mientras que la lingua característica será un lenguaje que "se apoye en caracteres, i.e. símbolos, a partir de los cuales pueda producirse totalmente" [8]. Con un concepto exacto de matematización, un sistema de signos idóneo y una traslación apropiada de las reglas lógicas de inferencia a reglas esquemáticas de deducción se puede obtener entonces un "Cálculo Lógico" [9]. Si se acepta la tendencia a la universalidad del programa leibniziano y se le limita a la Lógica, se puede considerar el procedimiento de deducción del cálculo lógico un "ars inveniendi", pero el "ars iudicandi" será un método de decisión "mecánico" independiente de aquél. De hecho es posible demostrar entonces que ciertas

---

[6] RAMÓN LLULL, *Ars magna et ultima.* En: *Raymundi Lulli opera ea quae ad adinventam ab ipso artem universalem... pertinent.* Strassburg, 1617. ATHANASIUS KIRCHER, *Polygraphia nova et universalis, ex combinatoria arte detecta.* Roma, 1663. (citado ya en Leibniz, "*Dissertatio de arte combinatoria*", de 1666; cf. Gerh. Phil. iv 72. Leibniz hace referencia también a una correspondencia con Kircher en una carta de 1670 a Oldenbourg; cf. Gerh. Phil. vii 5).

GEORGE DALGARNO, *Ars signorum, vulgo character universalis et lingua philosophica* etc. Londres, 1661. Cf. Gerh. Phil. vii 7.

JOHN WILKINS, *Mercury, or the secret and swift Messenger: shewing how a Man may with Privacy and Spead communicate his Thoughts to a Friend at a Distance.* Londres, 1641. De éste mismo: *An Essay towards a Real Character and a Philosophical Language, with an alphabetical Dictionary.* Londres, 1668.

[7] No vemos ningún motivo para seguir manteniendo hoy día la distinción entre "Lógica" y "Logística". Sin embargo, históricamente es útil.

[8] SCHOLZ, *Mathesis universalis* 146.

[9] SCHOLZ, *Mathesis universalis* 144. En el Congreso Internacional de Filosofía Científica celebrado en París en 1935, Scholz subrayó que "la Lógica exacta, que Leibniz fue el primero en concebir, implica esencialmente todo lo que pedimos hoy de una Lógica logística: un conjunto de signos apropiado básicamente para la presentación de todas las proposiciones científicas (characteristica universalis), un sistema de reglas de transformación basado sobre este conjunto de signos (calculus ratiocinator) y una teoría de definición mediante la cual sea controlada rigurosamente la introducción de signos nuevos (ars combinatoria)" (citado según J. RITTER in SCHOLZ, *Mathesis universalis,* 8 s.). Esta interpretación del ars combinatoria no puede, a mi parecer, fundamentarse en Leibniz mismo.

partes del programa de LEIBNIZ son realizables y que otras son definitivamente irrealizables en esta interpretación.

Para posibilitar esta interpretación hay que limitarse a una Lógica entendida como ciencia especial y renunciar, así, a la idea leibniziana de una Mathesis universalis, con lo que el distanciamiento respecto de las partes del programa de LEIBNIZ dependientes de la mística barroca es muy considerable. A partir de lo dicho se podrá entender con facilidad por qué los creadores de esta imagen de LEIBNIZ han evitado cuidadosamente situarlo en el contexto del movimiento universalista de LLULL. Aunque esta interpretación se deberá tachar de parcial, sin embargo presenta partes positivas. Indudablemente ha favorecido nuestra comprensión de LEIBNIZ en puntos tan esenciales que no se querrá renunciar a ella, una vez hallada. De aquí que sólo pueda ser bien acogida una complementación de la imagen "logística" de LEIBNIZ (por ejemplo, mediante las muy notables investigaciones de MAHNKE), no considerándose apetecible en modo alguno su cancelación —como se ha pedido recientemente [10], por lo demás no totalmente fuera de la ideología y de los intereses de LEIBNIZ mismo.

Ciertamente parece que la conexión de LEIBNIZ con la Logística, en el sentido de la interpretación bosquejada, requiere una investigación más minuciosa. En los pocos trabajos presentes que tratan de este tema se plantea esta conexión sólo como sistemática y realizada gracias a que el moderno formalismo ha llegado a resultados que —de modo totalmente impremeditado— se ha mostrado luego que corresponden a determinadas intenciones leibnizianas. Es necesario corregir una interpretación tal, aunque sea correcta para ciertos casos aislados. Entre los investigadores del siglo XIX, tachados durante largo tiempo de intrusos, que de modo totalmente consciente se dedicaron a desarrollar los "pensamientos embrionarios" legados por LEIBNIZ, se encuentra, junto a HERMANN GRASSMANN [11], el auténtico creador de la nueva Lógica: GOTTLOB FREGE. Mientras que la bibliografía recogida bajo el lema "Frege como precursor" aumenta casi de año en año, no se ha prestado suficiente atención a la búsqueda de puntos de contacto entre FREGE y pensadores anteriores. La mayoría de las veces se habla de modo tal que parece como si FREGE hubiese creado su Lógica "de la nada", i.e. sin precursor alguno en sentido propio. Esta interpretación se funda, en primer lugar, en el hecho de que el mismo FREGE apenas ha dejado puntos de apoyo para hablar de tales conexiones; ni siquiera los trabajos aclaratorios de FREGE a su "Begriffsschrift" de 1879 pueden garantizar que su Lógica o tan sólo su sistema de signos se haya derivado realmente de los trabajos de BOOLE (incluso se lo puede considerar dudoso). Con todo la frecuencia sorpren-

---

[10] Aludimos a la exposición breve y excelente "Zur Frühgeschichte der Logistik" en Günther JACOBY: Die Ansprüche der Logistiker auf die Logik und ihre Geschichtschreibung, Stuttgart 1962.

[11] Hermann GRASSMANN, *Geometrische Analyse geknüpft an die von Leibniz gefundene geometrische Charakteristik*. Leipzig 1847.

dente de puntos de contacto freguianos con líneas de pensamiento leibnizianas hubiera debido llamar la atención; así, por ejemplo (y sólo para citar unos pocos ejemplos característicos): FREGE acepta la exigencia leibniziana "de que la relación entre signos ha de ser lo más acorde posible con la de las cosas" (BRL 5)*; es más, la identificación llega incluso hasta el empleo de ejemplos y términos leibnizianos (el ejemplo del microscopio, en Bs.V, es un ejemplo favorito de LEIBNIZ; la "potencia" de FREGE, en Bs. 25, no es otra cosa que el "vi" de LEIBNIZ). El hecho de que aquí no se trata sólo ocasionalmente de la simpatía del racionalista FREGE por el racionalista LEIBNIZ, nos lo ha documentado el mismo FREGE en la introducción a su artículo "Booles rechnende Logik und die Begriffsschrift", donde se declara abiertamente leibniziano y acentúa su intento de llevar a cabo con su conceptografía una "nueva aproximación a las ideas leibnizianas de una lingua characterica" (sic)[12]. Por esto tampoco aceptaremos incondicionalmente la opinión de SCHOLZ de que FREGE ha "sido incitado a la creación de su cálculo lógico no por el estudio de LEIBNIZ, sino por una cuestión filosófica", a saber la de la deducibilidad de la Aritmética a partir de la Lógica[13]; así, mientras para SCHOLZ ha sido KANT el primero que de manera plenamente precisa se ha planteado (y negado categóricamente) esta cuestión[14], según la opinión de FREGE —no tememos la formulación paradójica— fue LEIBNIZ el primero que claramente la respondió en forma afirmativa.

Por estar convencidos de la importancia que tiene la conexión entre LEIBNIZ y FREGE (cuya investigación no ha de realizarse aquí, a pesar de las valiosas aclaraciones que aportaría al enfoque filosófico de los fundamentos de FREGE), no comenzamos nuestro trabajo directamente a partir del "Begriffsschrift" freguiano, sino de lo que hemos denominado el "programa de LEIBNIZ". Consideramos el calculus ratiocinator de LEIBNIZ sólo como uno entre los innumerables intentos de asegurar la certeza del conocimiento científico mediante un control pleno de su proceso de prueba, y el "Begriffsschrift" de FREGE como otro intento que debe su situación especial en esta historia a la circunstancia de haber tenido éxito por primera vez en él la introducción de un sistema de signos en el dominio de la Lógica y de la Aritmética —bajo la consabida renuncia al universalismo de LEIBNIZ—, sistema de signos que posibilitaba la formulación de las pruebas de manera estrictamente controlable.

---

* Tal manuscrito ("Booles rechnende...") ha sido editado recientemente por H. Hermes, F. Kambartel, F. Kaulbach en: G. FREGE, *Nachgelassene Schriften und Wissenschaftlicher Briefwechsel*, 1.er vol.: *Nachgelassene Schriften*, Felix Meiner, Hamburgo, 1969. La presente cita corresponde a dicho vol. I., 13. *(N. del T.)*

[12] Ms. BRL 3. TRENDELENBURG, de quien Frege toma probablemente la forma "lingua characterica" (en lugar de "characteristica"), considera que esta expresión es leibniziana, apoyándose quizá en un título de un fragmento de Leibniz, que introdujo RASPE.

[13] SCHOLZ, *Mathesis universalis* 271.

[14] Ibid.

Las nociones básicas no eran de suyo nuevas. Así FREGE clasificó las verdades necesitadas de fundamentación no por su origen psicológico, sino por su tipo de prueba, oponiendo las fundamentadas por medios puramente lógicos a las decididas por la experiencia. Como cualquier racionalista consideró que la demostración más firme era "la puramente lógica, que, prescindiendo de la naturaleza peculiar de las cosas, se basa sólo en leyes en las que se apoya todo conocimiento" (Bs. III). Quien, como FREGE, hubiera dedicado su interés al conocimiento matemático y, especialmente, a la verdad aritmética, hubiera debido, bajo este punto de vista, considerar la Aritmética de su época como extremadamente imperfecta, puesto que no eran ni inusitadas ni ilícitas las argumentaciones basadas en la intuición. Para ver "hasta qué punto se podía progresar en la Aritmética mediante deducciones apoyadas únicamente en las leyes del pensamiento, que están elevadas sobre toda singularidad" (Bs. IV), FREGE intentó imposibilitar las mezclas intuitivas en las pruebas mediante la disolución de lagunas en las cadenas deductivas. Entonces resultó evidente que el lenguaje natural no permitía la formulación de cadenas deductivas con el rigor preciso, de modo que FREGE se vio obligado a desarrollar un "lenguaje artificial" que cumpliera la exigencia de precisión de las pruebas matemáticas. Así renunció a la expresión de todo aquello que, en el contenido del juicio, no tuviese importancia para la inferencia, manteniendo sólo como relevante el resto: lo que FREGE denominó el "contenido conceptual" del juicio.

FREGE publicó el sistema de signos, ideado por él, en 1879, bajo el título de "Begriffsschrift, eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkes" [15]. Esta obra está dividida en tres capítulos. El primero, titulado "Aclaración de los signos", expone las nociones lógicas que constituyen la base del "Begriffsschrift" y que en su totalidad podemos denominar, de acuerdo con BIERICH [16]: "primera doctrina del juicio", de FREGE. FREGE distingue en un juicio (asertórico) el contenido del juicio, i.e. "la conexión de ideas", del reconocimiento de su verdad, i.e. de la aserción [17]. Por primera vez se atiende a una diferencia de esta índole en el simbolismo lógico. FREGE procede del modo siguiente: Si A es el contenido de un juicio, entonces "⊢ A" designa el juicio como totalidad, y "— A" sólo la simple conexión de ideas "sobre la que el es-

[15] Halle a. S. 1879. Reimpreso por I. Angelelli con los comentarios de E. Husserl y H. Scholz, Hildesheim (Georg Olms) o Darmstadt (Wiss. Buchgesellschaft) 1964.

[16] Marcus BIERICH, *Freges Lehre von dem Sinn und der Bedeutung der Urteile und Russells Kritik an dieser Lehre. Phil. Diss. Hamburg* 1951.

[17] FREGE supone que el lector del "Begriffsschrift" tiene algún conocimiento de lo que se entiende en Lógica por juicio. Aquí puede evitarse fácilmente la dificultad, existente en la Lógica tradicional, de poderse designar "juicio" diferentes cosas. En el caso presente hay numerosos motivos para acogernos al punto de vista de Kant, a su interpretación por LOTZE, así como también a la doctrina del juicio propia de LOTZE. Esto mismo se presupone en el trabajo de BIERICH, que, mediante un análisis del texto y del contenido —y otros aspectos—, intenta mostrar que FREGE entiende por "juicio", en el "Begriffsschrift", "juicio asertórico" Este supuesto es evidente en cuanto que FREGE usa promiscuamente en el "Begriffsschrift" ambas expresiones.

critor no expresa si reconoce o no su verdad" (Bs. 2). FREGE traduce "— A" con las palabras "la circunstancia de que A" o "la proposición de que A". Realmente no todo contenido puede interpretarse como contenido de un juicio, por ejemplo, no es posible en el caso de la idea (contenido) "Casa". Por consiguiente, FREGE distingue entre contenidos "enjuiciables" y "no-enjuiciables". Establece que el símbolo "⊢—" sólo tendrá pleno sentido ante signos de contenidos del primer tipo, nunca del segundo; de modo que se considera, por ejemplo, que la conexión de signos "⊢— Casa" carece de sentido (Bs. 2). Se considera que el símbolo "⊢—" está constituido por el "trazo de juicio" "|" y por el "trazo de contenido" "—", por lo cual la conceptografía es concebida de tal modo que el trazo de contenido tiene la misión adicional de unir los signos que le sigan en un todo, a cuyo contenido se aplica entonces la aserción expresada por "|". En lo que sigue se aclarará cómo se consigue esta "puesta entre paréntesis" mediante el trazo de contenido.

A pesar de su conexión ligera con KANT y LOTZE, la concepción freguiana del juicio supone ya una cierta posición original en cuanto que abandona casi por completo la división tradicional de los juicios. En rigor, tampoco se lleva a cabo una clasificación de los juicios mismos, sino de sus contenidos. Con ello se demuestra que ciertas distinciones tradicionales son superfluas y que otras conciernen a la legitimidad de la emisión del juicio, pero no al contenido del juicio, y por ello son irrelevantes para la conceptografía. Así FREGE distingue, según la cantidad, sólo juicios universales y particulares (Bs. 4), y la universalidad y la particularidad son atribuidas al contenido: "Estas propiedades conciernen al contenido incluso cuando no es presentado como juicio, sino como proposición" (Bs. 4). Asimismo, la cualidad del juicio debe ser propiamente cualidad del contenido, desde el momento en que cualquier prueba indirecta procede de la negación de un contenido, aún sin estar éste afirmado (en caso contrario la negación sería insostenible). "La negación se aplica al contenido lo mismo si aparece que si no aparece como juicio. Creo oportuno por ello considerar la negación como señal de un *contenido enjuiciable*" (Bs. 4). Sobre este carácter especial de la negación volveremos a hablar más tarde.

Por lo que respecta a la modalidad de los juicios, el juicio apodíctico se distingue del asertórico "en que es denotada la existencia de juicios universales, de los cuales la proposición puede ser inferida" (Bs. 4); pues, "si designo una proposición como necesaria, doy por este medio una indicación sobre mis fundamentos del juicio" (ibid.). Pero, ya que esto no concierne al contenido del juicio, se puede omitir en la conceptografía. Análogamente hemos de interpretar el juicio problemático: "Si una proposición es considerada posible, entonces quien la expresa o se abstiene de juzgar, indicando que no conoce ley alguna de la cual se siga su negación, o dice que la negación general de la proposición es falsa" (Bs. 5). En el primer caso la conceptografía ha de hacer caso omiso; en el segundo, se trata de un juicio particular afirmativo (asertórico). Con

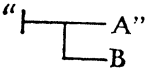
esto desaparece la distinción de modalidades diferentes de juicios, cosa que, al mismo tiempo, facilita la aclaración del uso sinónimo de los términos "juicio" y "juicio asertórico" que hace FREGE.

Finalmente, sobre la clasificación de los juicios por la relación se dice: "La distinción de los juicios en categóricos, hipotéticos y disyuntivos me parece que sólo tiene significación gramatical" (Bs. 4). Con lo que quiere decir FREGE que no se distinguen lógicamente. Los signos de contenidos pueden ser conectados mediante "o" y "si..., entonces", cualquiera que sea el modo particular en que estén compuestos los contenidos mismos; la aserción debe, asimismo, referirse al contenido total, independientemente de su estructura particular. Con ello se elimina también la clasificación de los juicios por la relación.

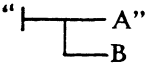
No obstante, esta aclaración sobre los tipos de juicio tiene sólo un carácter preparatorio y es, ante todo, una concesión hecha al lector que desee saber cómo se relaciona la interpretación freguiana del juicio con la usual desde KANT: cómo y por qué se separa de ésta. El hecho de que FREGE ha de ofrecer algo más que una nueva clasificación de las formas del juicio, se ve por primera vez en la sustitución de la división de los juicios según la relación por una teoría de la conexión de contenidos dados en uno nuevo. Si A y B son dos contenidos enjuiciables, evidentemente sólo hay cuatro posibilidades:

1) A es afirmado y B es afirmado,
2) A es afirmado y B es negado,
3) A es negado y B es afirmado,
4) A es negado y B es negado.

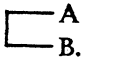
Mediante



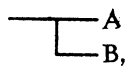
FREGE expresa el juicio: "La tercera de estas posibilidades no se realiza, sino una de las otras tres" (Bs. 5). Esta conexión corresponde a la implicación (material) Cpq de la lógica contemporánea. Aquí



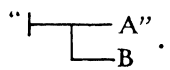
se considera compuesta y la estructura de esta conexión se explica del modo siguiente. Representados A y B, como contenidos enjuiciables, por — A y — B, la relación condicional existente entre ellos se expresa mediante el "trazo de condición" vertical:



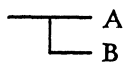
Sólo ahora se expresa el contenido total mediante la adición de un trazo de contenido:



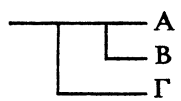
al cual se aplica la aserción en



Un contenido como



puede ser incluido de nuevo en conexiones, por ejemplo en

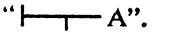


lo que corresponde a nuestro CpCqr y es equivalente a CKpqr.

De las explicaciones dadas se desprende "que de y de ⊢ B se sigue el nuevo juicio ⊢ A" (Bs. 7).

En el "Begriffsschrift", donde se tomarán como base "elementos" lo más simples posible, es este tipo de inferencia, el Modus Ponens (también llamado "regla de separación"), el único usado por FREGE [18].

Hasta aquí no ha aparecido ningún caso en el que ocurra una negación. Ya que, según la interpretación de FREGE, la negación se aplica al contenido, no pueden tolerarse casos en los que se oponga al trazo de afirmación una especie de "trazo de denegación". Más bien, hay un "trazo de negación" que puede combinarse con el trazo de contenido, de manera que "⊤ A" expresa la circunstancia de que A "no se realiza". Hay que pensar que la figura total está constituida del modo siguiente: A partir de "A", se forma "— A" y luego la negación de este contenido se expresa mediante "⊢ A", representándose esto, como contenido total, mediante "⊤ A". Si se quiere dar a entender que lo así expresado es exacto (es verdadero), se debe añadir el trazo de aserción:



[18] Más tarde, en *Grundgesetze der Arithmetik*, FREGE introdujo otras formas de inferencia; sin embargo, son todas derivadas del Modus ponens, que, por lo tanto, aparece como fundamentalmente suficiente también allí. Cualquier limitación que se decida, dependerá del fin perseguido. Cuando se tenga que demostrar alguna proposición en la conceptografía, una pluralidad de posibilidades de inferencia abreviarán las demostraciones; en investigaciones sobre la conceptografía interesará simplificar, si ha de considerarse sólo una única forma de inferencia.

FREGE muestra ahora cómo pueden expresarse otras relaciones entre contenidos mediante los recursos conceptográficos establecidos.

CNpq	es equivalente a	Apq ("o" no-exclusivo)
CpNq	es equivalente a	Dpq (incompatibilidad)
NCpNq	es equivalente a	Kpq (conjunción "y")
NCpq	es equivalente a	Lpq (p, pero no q)
NCNpNq	es equivalente a	Mpq (q, pero no p)
NCNpq	es equivalente a	Xpq (ni p, ni q)

FREGE renuncia a introducir signos nuevos para estas relaciones en la conceptografía. No intenta tampoco abarcar más allá de las 16 conexiones posibles de la Lógica de Enunciados, aunque hoy sabemos que puede hacerse. El hecho de que tampoco se encuentre indicio alguno de una "definición" (mejor dicho: expresabilidad) de todas las conexiones mediante D o X, es realmente fácil de comprender. Tal modo de proceder hubiera sino inadmisible para FREGE por violar uno de sus principios básicos, ya que un elemento "lógicamente simple", como la negación, debería ser reducido a otro.

Con todo tiene sentido preguntar por qué en nuestra tabla no aparece la equivalencia Epq. Su explicación radica en la interpretación peculiar de FREGE de la "igualdad de contenido", tal como es desarrollada en el parágrafo octavo del "Begriffsschrift". Ya que posteriormente se volverá en repetidas ocasiones sobre estas aclaraciones de FREGE, debe citarse completamente el texto de este parágrafo:

"La igualdad de contenido se diferencia de la condición y negación porque se aplica a nombres, no a contenidos. Mientras que, en general, los signos son representantes sólo de su contenido, de modo que cualquier combinación en que se encuentren sólo expresa una relación entre sus contenidos, aparecen sin embargo in propria persona tan pronto como son unidos mediante el signo de la igualdad de contenido, puesto que mediante éste se designa el hecho de que dos nombres tienen el mismo contenido. Así, pues, con la introducción de un signo para la igualdad de contenido, todos los signos presentan necesariamente una doble Referencia: Se refieren ora a su contenido, ora a sí mismos. Ello podría hacer suponer que aquí se trata de algo que sólo pertenece a la *expresión y no al pensamiento,* y que no se necesita en modo alguno signos distintos para el mismo contenido. Para mostrar la irrealidad de tal parecer, selecciono el siguiente ejemplo de la Geometría..." *(sigue un ejemplo similar al reproducido aquí, pág. 93, sobre la coincidencia de dos puntos de intersección)* (Bs. 13-14).

"Entonces ⊢ (A ≡ B) significa: El signo A y el signo B tienen el mismo contenido conceptual, de modo que se puede poner B en lugar de A en todas sus ocurrencias y viceversa" (Bs. 15).

Los medios de la conceptografía descritos hasta aquí permiten la exposición detallada de leyes lógicas, en tanto que sean independientes de la estructura específica de los juicios para los que valen. Con todo, si se quiere, como lo hace la Lógica desde Aristóteles, construir enunciados sobre juicios de la forma "Todos los S son P", "Algunos S no

son P", etc., entonces se ha de tener la posibilidad de describir también la estructura "interna" de los juicios. A este respecto FREGE considera, en primer lugar, una expresión (no formulada necesariamente en la conceptografía) sobre el hecho de que el hidrógeno es más ligero que el anhídrido carbónico. En una expresión tal ocurrirá un signo para el hidrógeno. Este signo puede sustituirse (por ejemplo) por un signo para el oxígeno. "En cuanto se considera que se puede cambiar una expresión de esta manera, se descompone en una parte constante, que representa la totalidad de la relación, y el signo que se considera sustituible por otro y que denota el objeto que se encuentra en esta relación" (Bs. 15). FREGE, en el "Begriffsschrift", designa a la primera parte función y a la segunda argumento. De acuerdo con todo ello se encuentra el principio general:

> "Si en una expresión cuyo contenido no ha de ser necesariamente enjuiciable, un signo simple o compuesto ocurre en uno o más lugares, y lo consideramos sustituible en todos o algunos de estos lugares por otro signo que sea siempre el mismo, entonces denominamos función a la parte que permanece constante y argumento a la sustituible" (Bs. 16).

Con todo, el empleo de esta definición supone la formulación de la expresión a analizar en un sistema simbólico artificial que sea apropiado. El lenguaje natural es poco apropiado, como se puede ver fácilmente en el ejemplo de las proposiciones "El número 20 es representable como suma de cuatro números cuadrados" y "Todo número entero positivo es representable como suma de cuatro números cuadrados". Estas proposiciones tienen la misma forma lingüística "... es representable como suma de cuatro números cuadrados". Pero no tienen la misma "forma lógica" [19], puesto que "el número 20" y "todo número positivo" no son "conceptos de igual rango", como dice FREGE. "La expresión 'todo número positivo', a diferencia de 'el número 20', no representa por sí sola una idea independiente, sino que obtiene Sentido sólo mediante el contexto de la proposición" (Bs. 17).

El ejemplo es todavía útil de otra manera. A saber, FREGE considera el análisis en función y argumento en ciertos casos como puro objeto de interpretación, y en otros casos no. Así, "las diferentes maneras de interpretar el mismo contenido conceptual como función de este o aquel argumento" (Bs. 17) pueden aclararse con el ejemplo inicial de FREGE, en el que "hidrógeno" era el argumento y "ser más ligero que el anhídrido carbónico" era la función, teniendo en cuenta que se trataría el mismo contenido conceptual en una expresión en la que "anhídrido carbónico" representara el argumento y "ser más pesado que el hidrógeno" la función (Bs. 15). Por el contrario, la distinción de función y argumento

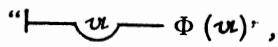
[19] Usado por FREGE en Gl. 83, aunque, posiblemente, no como término (cf. WBBs. 52), de modo que la relación con las formaciones conceptuales del mismo nombre en RUSSELL y WITTGESTEIN constituye una cuestión abierta. Sobre el concepto de "forma lógica", véase las observaciones críticas de Y. BAR-HILLEL, *Comments on Logical Form*. En: Philosophical Studies 2 (1951) 26-29.

cobra significado tan pronto como la función o el argumento está indeterminado. A este respecto, FREGE remite al segundo ejemplo citado, según el cual "ser representable como suma de cuatro números cuadrados" proporciona siempre una proposición correcta, cualquiera que sea el número entero positivo que la expresión introducida como argumento designe. Aquí, según FREGE, es "analizada la totalidad en función y argumento de acuerdo con el contenido y no con la interpretación solamente" (Bs. 17).

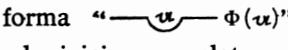
Es extraño que hasta ahora parezca no haberse caído en la cuenta de que, en este lugar, se encuentra preparada la interpretación posterior de FREGE, según la cual en un juicio universal tal no se dice nada sobre un objeto, sino sobre un concepto (y esto significa: sobre una función en el sentido de los escritos posteriores a 1890). FREGE pudo aceptar por primera vez este punto de vista al abandonar la interpretación de la relación entre función y argumento como pura conexión sintáctica, desarrollada en el "Begriffsschrift". Pero en la interpretación del "Begriffsschrift" son evidentes ya dos cosas. Es evidente, en primer lugar, que FREGE emplea el concepto de función en un sentido mucho más amplio (y, por consiguiente, en otro sentido) que el que era habitual hasta entonces en la Matemática, puesto que la serie de palabras "es representable como suma de cuatro números cuadrados" es una función en el "Begriffsschrift" de FREGE y, en cambio, no es una parte de una "expresión de cálculo", y, por ello, no es tampoco una función matemática en el sentido usual anterior a FREGE. Esto se muestra en el hecho de que con la inserción de un argumento no se obtiene como valor la expresión de un número o de una cantidad, sino una proposición en el sentido gramatical de la palabra. En segundo lugar, es evidente que mediante la trasposición del concepto de función matemática FREGE no quiso, en modo alguno, "matematizar la filosofía", como en ocasiones han afirmado algunos filósofos. La terminología de "función" y "argumento" se apoya más bien en una analogía que, a decir verdad, es tan obvia como útil, pero que en todo momento puede ser sustituida por otra terminología, sin que ello tenga repercusiones en la distinción misma hecha por FREGE.

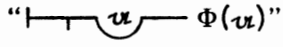
Sin entrar en la cuestión de cómo introduce FREGE en el "Begriffsschrift" funciones con varios argumentos, vamos a dedicarnos a la cuestión de qué contribución a la expresión de juicios universales puede proporcionar este modo de considerar la función y el argumento. Mediante el empleo de las llamadas variables se expresa desde Aristóteles la universalidad sin límites de aquello que aparezca como argumento en una expresión. Con todo, fue FREGE el primero en reconocer y aprovechar las múltiples posibilidades de estos medios de expresión, puesto que fue el primero en emplear variables que estuvieran "ligadas" por un operador (el "hueco" correspondiente a nuestro cuantificador universal) y que se ajustaron así a la expresión de la universalidad limitada. El empleo mismo muestra mejor el significado de lo dicho.

Si Φ es una función determinada, entonces

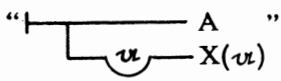


significa en el "Begriffsschrift" de FREGE que Φ(Δ) es un hecho, cualquiera que sea aquí el objeto designado por "Δ". Otras traducciones serían: "para todo Δ vale Φ(Δ)", "para cualquier Δ, la proposición 'Φ(Δ)' es una proposición verdadera".

Una expresión de la forma "  " puede, en virtud de su estructura, formar parte de juicios completamente diferentes, por ejemplo en

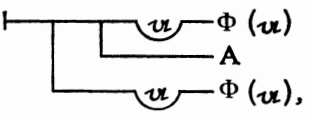


o en

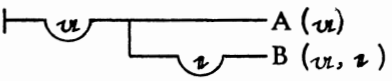


que se pueden leer: "Φ(Δ) no vale para todo Δ" y "A vale, si X(Γ) vale para todo Γ", respectivamente. El hecho de que a partir de estos juicios, como a partir de

no se pueda obtener un juicio correcto, menos universal, mediante la sustitución de $\nu\iota$ por un nombre de objeto "Δ", permite que sea evidente la tarea que corresponde al hueco con la letra alemana: "Delimita el dominio al que se aplica la universalidad designada por la letra. Sólo dentro de su dominio la letra alemana conserva su Referencia" (Bs. 20) Con todo, en un juicio la misma letra alemana puede "ocurrir en diferentes dominios, sin que la Referencia que se le atribuye se extienda a los restantes" (ibíd.), por ejemplo, en

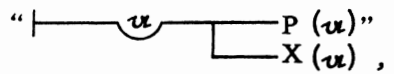


y "el dominio de la letra alemana puede incluir el de otra, como muestra el ejemplo

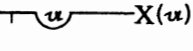


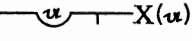
(Bs. 20 s.).

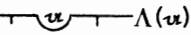
Con estos medios conceptográficos nuevos, el juicio "Todos los X son P" se representa, por ejemplo:



i.e. en la forma "si algo tiene la propiedad X, entonces tiene también la propiedad P". No vamos a entrar en detalles técnicos. Lo que consideramos importante aquí es el hecho de que, en conexión con el signo de negación, pueden expresarse juicios existenciales en el sentido de la lógica clásica:

 : Hay algunas cosas que no tienen la propiedad X;

 : No hay ninguna cosa que tenga la propiedad X ("No hay ningún X");

 : Hay algunos Λ, o: Hay por lo menos un Λ.

En el segundo capítulo del "Begriffsschrift" se realiza una "Exposición y Deducción de algunos juicios del puro pensamiento". En el primer capítulo ya se habían introducido ciertas reglas para el uso de los signos de la conceptografía. Ya que las reglas son, para FREGE, "imágenes de leyes", puede plantearse la cuestión de si la misma conceptografía puede expresar aquellas leyes cuyas imágenes son las leyes empleadas para su construcción. Ya que la conceptografía no tiene por fin una fundamentación, sino una presentación de las leyes lógicas, no se produciría necesariamente un círculo vicioso. Con todo, FREGE especifica que las reglas empleadas hasta ahora no pueden formularse en la conceptografía, en cuanto constituyen su base. No se ha de inferir de esta aserción el que FREGE diferencie claramente ya en el "Begriffsschrift" entre las proposiciones de la conceptografía como "lenguaje objeto" y las proposiciones sobre la conceptografía como "metalenguaje". Ley, juicio y proposición no están aquí claramente diferenciadas y el paso entre regla y ley está muy lejos de la claridad que hoy es posible sobre la base del llamado teorema de deducción.

Ello se ha de tener en cuenta cuando FREGE, hecha la citada excepción, vaya a presentar conceptográficamente otros "juicios del puro pensamiento". Los requisitos que establece son rigurosos: Todos los juicios, que puedan presentarse así, deben ser deducidos de un "núcleo" de leyes que "potencialmente los contenga a todos" (Bs. 25), con la ayuda de reglas constantes dadas. FREGE, que ve claramente que se puede elegir este núcleo de diferentes maneras, parte de un núcleo que consta de nueve leyes. Lo que entonces sigue no es otra cosa que una construcción axiomática de la Lógica, basada sobre el "núcleo" como sistema axiomático. Puede discutirse si FREGE ha construido ya la Lógica en la

extensión del Cálculo de Predicados de primer grado[20], pero lo seguro es que ha construido la parte enunciativa de esta Lógica. Desarrolla en el "Begriffsschrift" un Cálculo de Enunciados que es la primera forma y también la definitiva del mismo, en cuanto que todos los Cálculos de Enunciados posteriores al freguiano sólo se diferencian de él en lo accidental. La parte enunciativa del núcleo en la construcción freguiana:

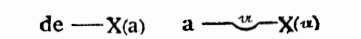
1. CpCqp
2. CCpCqrCCpqCpr
3. CCpCqrCqCpr
4. CCpqCNqNp
5. CNNpp
6. CpNNp

es completa en el sentido de que, con la ayuda de las reglas dadas, son deducibles de ella todas las proposiciones correctas de la Lógica de Enunciados[21]. FREGE obtiene a partir de este núcleo completo un número elevado de fórmulas lógicas enunciativas y predicativas, entre las que se encuentran también las que son equivalentes o precisan los enunciados universales o existenciales de la Lógica tradicional. Estas le hacen posible a FREGE concluir el capítulo con el establecimiento de un esquema que corresponde al "cuadrado lógico" de la tradición.

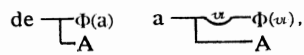
La mirada retrospectiva desde aquí al camino recorrido por FREGE evidencia que no se trata de reunir los medios lógicos idóneos para la construcción de una forma presupuesta de la Matemática. Más bien se desarrollan simultáneamente una imagen ideal de la Lógica y un sistema simbólico adecuado a ella, tal que la formulabilidad en este sistema simbólico sea un requisito mínimo de las pruebas matemáticas. Está claro que la Lógica no sólo debe ocupar un primer plano en la construcción de este sistema, sino que ella misma debe ser tematizada. Pero, por otra

---

[20] Nos referimos a W. y M. KNEALE, *The Development of Logic* (Oxford 1962). Allí (pág. 489) el paso



que FREGE considera simplemente que es una abreviatura definicional, es tratado como regla adicional de inferencia, al igual que el paso



aunque este último con la restricción de que *a* no ocurra en *A*. Si se añade al núcleo freguiano, además del Modus ponens, la "regla de sustitución", —no formulada como regla en el "Begriffsschrift"—, se obtiene, según KNEALE, un sistema axiomático completo del Cálculo de Predicados de Primer Grado.

[21] [Adición de 1966] LUKASIEWICZ ha demostrado que el Axioma 3 puede ser derivado de los demás, e incluso sólo de 1 y 2 (véase J. LUKASIEWICZ, *Z historii logiky zdan,* en: Przeglad Filozoficzny 37 (1934) 417-437; en alemán: *Zur Geschichte der Aussagenlogik,* en: Erkenntnis 5 (1935/36) 111-131). Pero no se puede derivar ninguno de los cinco restantes Axiomas a partir de los demás. La independencia del Sistema de Axiomas (1, 2, 4, 5, 6), aseverada con ello, se

parte, no ha de perderse de vista que el fin de la conceptografía es proporcionar los medios para una construcción inobjetable de la Aritmética. Esto lo muestra el tercer capítulo, titulado, sencillamente, "Aspectos sobre una Teoría General de las Series". Renunciamos a la reproducción del simbolismo especial que FREGE introduce aquí para ampliar la conceptografía. Dicho simbolismo, en contraposición al simbolismo básico de la conceptografía, es extraño e incómodo de usar[22].

En cambio, el contenido de este capítulo es importante. FREGE construye aquí conceptográficamente —y, por consiguiente, de manera puramente lógica— la "relación de sucesión", fundamental para la serie de números naturales, de la cual depende, entre otras cosas, la posibilidad de la inducción completa. Con los conceptos, introducidos al mismo tiempo, de la transmisión hereditaria de una propiedad en una serie, de

---

puede demostrar mediante las cuasi-evaluaciones siguientes, en las que **0** es el valor designado:

Axioma 1:

N	
0	1
1	0
2	2

C	0	1	2
0	0	1	1
1	0	0	0
2	0	1	0

Axioma 2:

N	
0	1
1	0
2	2

C	0	1	2
0	0	1	2
1	0	0	0
2	0	2	0

Axioma 4:

N	
0	0
1	1

C	0	1
0	0	1
1	0	0

Axioma 5:

N	
0	0
1	0

C	0	1
0	0	1
1	0	0

Axioma 6:

N	
0	1
1	1

C	0	1
0	0	1
1	0	0

[22] Hoy día se ha propagado la opinión incorrecta de que el simbolismo lógico de FREGE es difícil e inmanejable. Parece extraño que se vea una desventaja en el desarrollo bidimensional de la conceptografía, cuando es precisamente esta bidimensionalidad lo que la hace superior a otros sistemas lógicos de signos. Posibilita una exposición de las relaciones de la Lógica de Enunciados y de la de Predicados, libres de puntos y de paréntesis, con una claridad que sólo puede ser alcanzada en los sistemas lineales mediante la colocación de líneas singulares unas debajo de otras, por lo tanto: sólo mediante la recurrencia a la segunda dimensión. Quien conozca esta ventaja de la conceptografía, no se sorprenderá del hecho, descubierto recientemente, de que el simbolismo de FREGE se muestre superior en un dominio bidimensional: el del Algebra de circuitos (W. HOERING, *Frege und die Schaltalgebra*, AMLG 3 (1957) (125-6). Es seguro que —además del hábito— sólo el fácil manejo tipográfico de los sistemas lineales ha contribuido a su éxito. Véase: H. SCHNELLE, *Zeichensysteme zur wissenschaftlichen Darstellung. Ein Beitrag zur Entfaltung der Ars characteristica im Sinne von G. W. Leibniz. Stuttgart-Bad Cannstatt* 1962.

la precedencia y sucesión de un elemento respecto de otro en una serie, de la pertenencia de un elemento a una serie, cuyo comienzo o fin sea conocido, así como del carácter muchos a uno de las funciones, se pueden expresar ya conceptográficamente propiedades elementales de los "números". Hasta entonces se había admitido que todos los enunciados sobre números eran de tal clase que cualquier prueba de su validez debía recurrir a la fundamentación de los números en el dominio matemático específico, en cambio FREGE mostró, en el tercer capítulo del "Begriffsschrift", la naturaleza puramente lógica de algunos enunciados fundamentales sobre números, aunque no se trata todavía de una constitución lógica del concepto de número. Ello queda reservado a los "Grundlagen der Arithmetik".

1.2. NUMERO Y CONCEPTO

En las investigaciones sobre el concepto de número, anunciadas en 1879, pero publicadas en 1884 bajo el título de "Grundlagen der Arithmetik" [1], FREGE renunció por completo a usar la conceptografía, tal vez en atención a la mayor parte del público filosófico que entonces, como hoy, siente cierta aversión hacia todo simbolismo. Así, pues, el escrito no debió de ser dirigido sólo a los matemáticos. Expresamente FREGE declaró en la introducción que la investigación del concepto de número es "común a la matemática y a la filosofía" y que si la cooperación entre ambas ciencias no es tan estrecha —como sería posible y deseable—, se debe a que el matemático se escandaliza con razón por el "predominio de los puntos de vista psicológicos en la filosofía, los cuales se infiltran incluso en la Lógica" (Gl. v).

Ha de evitarse el error del psicologismo, y así ya encontramos argumentos antipsicologistas en los "Grundlagen", donde los enunciados sobre números de LIPSCHIPTZ y SCHLOEMILCH son rechazados, puesto que contradicen un principio metódico expuesto por FREGE en su obra de 1884: "Hay que separar rigurosamente lo psicológico de lo lógico y lo subjetivo de lo objetivo" (Gl. x). Con todo, no basta con expulsar el psicologismo de la Aritmética. Tampoco se le debe conceder asilo en la Lógica, si se comparte el punto de vista freguiano de que "la Aritmética es sólo una Lógica desarrollada, siendo toda proposición aritmética una ley lógica" (Gl. 99).

En torno a esto, FREGE se plantea en el prólogo de *Grundgesetze der Arithmetik* [2] la cuestión del carácter peculiar de la Lógica, de las leyes lógicas y del concepto de verdad. Si se considera, siguiendo el modelo clásico, que la Lógica es el "arte de pensar correctamente" y que las leyes lógicas son como "hilos conductores del pensamiento... para alcanzar la verdad" (Gg I xv), entonces se corre el riesgo de caer en el psicologismo. Pues la palabra "ley" encierra un doble sentido. "En un sentido indica lo que es, en otro prescribe lo que debe ser. Sólo en este último sentido las leyes lógicas pueden ser denominadas leyes del pensamiento, puesto que fijan cómo debe pensarse. Cualquier ley que diga lo que es, puede ser considerada asimismo prescriptora de lo que debe pensarse en consonancia con ello, y en este sentido es una ley del pensamiento" [3].

---

[1] G. FREGE, *Die Grundlagen der Arithmetik. Eine logisch mathematische Untersuchung über den Begriff der Zahl. Breslau*, 1884. 2.ª Ed. ibid. 1934, repr. Hildesheim 1961.

[2] G. FREGE, *Grundgesetze der Arithmetik. Begriffsschriftlich abgeleitet.* Jena I 1893, II 1903. Repr. Hildesheim 1962 o Darmstadt 1962.

[3] Gg. I xv. La distinción entre "ley natural del pensamiento" y "ley normal del pensamiento" aparece ya en M. W. DROBISCH: *Neue Darstellung der Logik*

Pero si se acepta el supuesto erróneo de que "estas leyes rigen el pensamiento del mismo modo que las leyes de la naturaleza rigen los sucesos del mundo externo" (Gg I xv), entonces se convierten las leyes del pensamiento en leyes psicológicas y la Lógica en una parte de la psicología. Sus proposiciones son, entonces, proposiciones empíricas sobre la conducta observable de la actividad mental de sujetos experimentales.

Así, por ejemplo, en la Lógica de B. ERDMANN [4] la "certidumbre universal", en el sentido del *consensus omnium*, es equiparada a la validez universal y ésta, a su vez, a la verdad. Pero cree FREGE que este análisis del concepto de verdad es completamente falso. Los lógicos psicologistas confunden el que una proposición sea tenida por verdadera con que sea verdadera. El que FREGE, el 13 de julio de 1893, esté sentado en su habitación y escriba su prólogo, será verdadero, aunque más tarde todos los hombres lo tengan por falso. Naturalmente esto vale también para las leyes lógicas: "No son leyes psicológicas del tenerse por verdadero, sino leyes del ser verdadero" y lo son "porque son rectoras de nuestro pensamiento cuando quiere alcanzar la verdad" (Gg I xvi). Puede aducirse fácilmente más justificantes de que la Lógica de FREGE no debe ser una Lógica normativa en aquel sentido en que se contrapone a una Lógica "teorética", sino que, más bien, según FREGE, una y la misma ley lógica es en primer lugar ley del ser verdadero y sólo entonces puede adquirir una función normativa. Por estos motivos no podremos adherirnos a la interpretación de W. PAPST, que quiere ver en el hecho de que HUSSERL reasuma argumentos antipsicológicos (también freguianos), un progreso inusitadamente grande en cuanto que la decisión "Lógica psicológica o no psicológica es totalmente independiente del establecimiento del carácter normativo o no normativo de la misma" [5]. Pues también la determinación de la Lógica de FREGE como ciencia de las leyes del ser verdadero es totalmente independiente de si el ser verdadero proporciona o no una norma [6]. Así reconoce FREGE la existencia de "un dominio de lo objetivo, no-real, mientras que los lógicos psicologistas toman lo no-real por subjetivo sin más" (Gg I xviii). La idea de que se

---

nach ihren einfachsten Verhältnissen, mit Rücksicht auf Mathematik und Naturwissenschaft, §2 de la 2.ª Edición (Leipzig 1851; 1.ª Ed. 1836).

[4] B. ERDMANN, Logik, I: *Logische Elementarlehre*. Halle a. S. 1892.

[5] W. PAPST, *Gottlob Frege als Philosoph*, Phil. Diss. Berlin 1932, p. 12. De modo parecido, A. D. OSBORN, p. 56 s. Contra la interpretación de PAPST en este punto se manifiesta ya MORTAN, p. 27 s.

[6] El punto de vista de FREGE de que las proposiciones de una Lógica teorética no se oponen a las proposiciones de una Lógica normativa, sino que los caracteres teorético y normativo de una proposición sólo son aspectos diferentes de una y la misma ley lógica, nos parece que difiere aquí sólo inesencialmente de la concepción de HUSSERL, que, si bien distingue entre Ciencias teoréticas y normativas, limita a diferencia de la forma la diferencia entre proposiciones normativas y teoréticas: LU I 48, 49. Si se sustituye el juicio "p" por el juicio "p es verdadero", que tanto FREGE como HUSSERL consideran que es equivalente al anterior, entonces la segunda forma se relaciona ya con lo que HUSSERL llama la "norma fundamental" de la Lógica normativa, aun cuando sólo sean suficientemente expresivas las formas "sólo quien juzga 'p' (y no 'no-p') juzga correctamente" y "tú has de juzgar 'p'".

le pudiera acusar en este punto de tomar préstamos ilícitos de la metafísica, parece que no se le ocurrió a FREGE. El hecho de que ésta no sea su intención en ningún caso, podemos inferirlo de su aserción de que es "un signo seguro de error el que la Lógica tenga necesidad de la metafísica (!) y de la psicología, ciencias que, por su parte, necesitan las leyes fundamentales de la Lógica" (Gg I xix).

El desconocimiento de lo objetivo no-real (que luego examinaremos con más rigor) lleva a los lógicos psicologistas a tratar los conceptos como imágenes y a remitirlos, en cuanto tales, a la Psicología. Pero, si se comienza con este método, no sólo corren esta suerte los conceptos, como FREGE ha demostrado en *Grundgesetze* usando un ejemplo de la lógica erdmanniana (op. cit.). Aunque ERDMANN no sea el prototipo del psicologista[7], sin embargo FREGE pudo con gran efectividad traer a la luz las consecuencias idealistas de una Lógica no separada claramente de la psicología. Tanto más entonces un psicologismo, asumido conscientemente, debe conducir a un idealismo, que considere imágenes a todas y cada una de las cosas y que concluya en un solipsismo.

El hecho de que en este punto de vista se pierdan todas las diferencias lógicas sutiles (por ejemplo, la distinción entre atributo y propiedad, objeto y concepto, existencia y realidad) es sólo una consecuencia natural. Pero con ello se pierde también la posibilidad de hacer un análisis, aunque sólo sea aproximadamente correcto, de los conceptos y leyes aritméticas sobre bases psicologistas. FREGE lo demostró de nuevo en el análisis de la *Philosophie der Arithmetik*[8], de HUSSERL. Su recensión de este libro[9] es de una significación esencial para la historia de la filosofía contemporánea, porque el HUSSERL que en esta obra se apoya todavía en una base psicologista, ha dado en ella si no el primero, sí, al menos, el estímulo decisivo para cambiar de dirección[10].

[7] W. PAPST no va a conseguir nada con incluir a ERDMANN en la dirección psicologista. Sin embargo es característico que su argumentación se basa en la *segunda* adición de la lógica erdmanniana, cuyo año de aparición (1907) es posterior al del primer volumen de las "Logischen Untersuchungen" husserlianas. En éstas es tratado ERDMANN como representante de una lógica psicologista, bajo el título "Der Psychologismus als skeptischer Relativismus" (§ 40: Der Anthropologismus in B. ERDMANNs Logik).

[8] E. HUSSERL, *Philosophie der Arithmetik. Psychologische und logische Untersuchungen.* Primer (y único) volumen. Halle a. S. 1891.

[9] *Zeitschrift für Philosophie und philosophische Kritik* N. F. (ZPPK) 103 (1894) 313-332.

[10] Véase A. D. OSBORN, *Edmund Husserl and his Logical Investigations.* 2.ª Ed. Cambridge, Mass. 1949 (1.ª Ed. 1934). Capítulo 4: Frege's Attack on Husserl. Además: D. FØLLESDAL, *Husserl und Frege. Ein Beitrag zur Beleuchtung der Entstehung der Phänomenologischen Philosophie.* Oslo (Akad.) 1958. M. FARBER, *The Foundation of Phenomenology. Edmund Husserl and the Quest for a Rigorous Science of Philosophy.* Cambridge, Mass. 1943; así como la recensión del trabajo de FARBER por A. CHURCH en el Journal of Symbolic Logic 9 (1944) 63-65. Es digno de atención que ninguno de los autores, que se han ocupado de la influencia de FREGE sobre HUSSERL, ha tenido conocimiento de la existencia de una correspondencia (en parte conservada) entre ellos. De modo parecido, es sorprendente el esfuerzo y el considerable aparato metodológico que FØLLESDAL maneja para convencer al lector de que HUSSERL conoció "todos los escritos de FREGE hasta 1893". Para justificarlo, se puede compulsar fácilmente el Archivo de HUSSERL

En la *Philosophie der Arithmetik* HUSSERL quiere obtener el concepto de número a partir del concepto de multiplicidad. El concepto de multiplicidad, a su vez, ha de "desprenderse inmediatamente de la comparación de complexos concretos" (PA 89), donde se entienden los complexos como totalidades, cuyas partes están "conectadas colectivamente". Este tipo de conexión, que se representa lingüísticamente de modo adecuado mediante la conjunción "y", consiste única y exclusivamente en el acto de unir, no en una relación comprendida o creada en los contenidos aislados mismos. A partir de cada conexión colectiva de contenidos, concretamente dada, llegamos al número correspondiente al complexo en cuestión mediante abstracción sobre el "algo y algo, y algo etc.", que HUSSERL interpreta como "uno y uno y uno etc.".

Para clasificar esta teoría podemos recurrir, primeramente, a la distinción de FREGE entre interpretaciones del número "ingenuas" y "otras". Aquí se considera ingenua "cualquier opinión según la cual la cifra no sea un enunciado de un concepto o de una extensión conceptual" (RH 315) y, asimismo, p. ej., la interpretación del número como conjunto concreto o, también, como propiedad de un conjunto tal. El intento de HUSSERL puede interpretarse, entonces, como un "intento de justificar científicamente un tipo de interpretación ingenua del número" (RH 315). La base científica aceptada es la psicologista. "En primer lugar, todo es una imagen. Las Referencias de las palabras son imágenes. Por ejemplo, en la palabra "número" se trata de mostrar la imagen correspondiente, su génesis y su síntesis" (RH 316). Los conceptos son imágenes obtenidas por abstracción que en HUSSERL, sin duda, pertenecen primero al sujeto, aunque luego sean consideradas como objetivas, a semejanza del Pensamiento (en el sentido freguiano). De las explicaciones con que FREGE se defiende aquí frente a las objeciones que HUSSERL formula en su obra contra los "Grundlagen der Aritmetik", citaremos únicamente las que versan sobre la definibilidad del número y sobre la definición de igualdad numérica mediante la coordinación biunívoca. Pero es esencial la clarificación del carácter de los enunciados numéricos. Puesto que tales enunciados responden a la pregunta "¿Cuántos?", la descripción husserliana de los mismos como conjunciones ("Inglaterra e Irlanda son dos") es insatisfactoria. Pues no se pregunta "¿Cuántos son Inglaterra e Irlanda?", sino, p. ej., "¿Cuántos satélites tiene Marte?", i. e. "¿Cuál es el número de satélites de Marte?" En la respuesta "El número de satélites de Marte es dos" no tenemos ningún conector-"y", sino "un término conceptual o una designación conceptual compuesta" (RH 321).

De los tres escollos que debe esquivar cualquier teoría adecuada del número, según las explicaciones de FREGE en los *Grundlagen,* dos son insalvables para la teoría de HUSSERL. HUSSERL no puede fundar el uno

---

de Lovaina, donde hay numerosos escritos de Frege (en parte, separatas) dedicadas por FREGE a HUSSERL. A este respecto véase la nota de ANGELELLI en el Apéndice II de su nueva impresión del "Begriffsschrift" freguiano (Hildesheim o Darmstadt 1964; 117).

y el cero, cosa que se sigue inevitablemente de su teoría de la abstracción. Por ello les niega totalmente su carácter de número y los explica como "respuestas negativas" a la pregunta "¿Cuántos?" (PA 144). FREGE no experimenta ninguna fatiga al rechazar esta solución por insatisfactoria e inconsistente. Asimismo HUSSERL choca contra el obstáculo de los "grandes números", puesto que "la limitación de nuestra capacidad representativa debe llevar consigo una limitación del dominio de los números" (RH 328). Aunque FREGE, al concluir su recensión, recomiende a los psicólogos las investigaciones de HUSSERL (principalmente las del capítulo 11 sobre interpretaciones conjuntistas momentáneas, lo que proporciona de hecho una contribución de gran valor a la teoría de la Gestalt), sin embargo su juicio sobre el intento de HUSSERL de fundar la Aritmética es radicalmente negativo. "Si un geógrafo leyera una Oceanografía en la que el origen de los mares se explicara psicológicamente, entonces tendría la impresión de que se había errado en la tarea. Yo tengo esta misma impresión del trabajo presente" (RH 332).

La situación significada con ello (el hecho de que el número sea algo objetivo y no pueda tener su fundamento en el sujeto), arruina cualquier otro intento de fundar la Aritmética con ayuda de la psicología. Antes de buscar otro fundamento será conveniente plantear la cuestión de qué puntos de vista sobre los enunciados aritméticos son posibles. La distinción kantiana de analítico y sintético por una parte, y apriori y aposteriori por otra, posibilita una clasificación grosera. La interpretación que da FREGE sobre estos términos en los *Grundlagen* se aparta en algunos puntos de la kantiana, aunque no quiere "naturalmente introducir con ello un nuevo sentido, sino interpretar con acierto lo que los escritores anteriores, especialmente KANT, han pensado" (Gl. 3). Según FREGE, aquellas distinciones conciernen "no al contenido del juicio, sino a la legitimidad de su emisión" (ibíd.), pues al clasificar una proposición como aposteriori o analítica no se enjuician las condiciones psicológicas o cualesquiera otras a base de las cuales el contenido de la proposición puede ser formado en la conciencia, sino "aquello en que apoya sus fundamentos más profundos la legitimidad del tenerse por verdadero [11]. Para mostrar esta legitimidad hay que retrotraer la prueba de una verdad aritmética hasta las "verdades primitivas".

"Si por este camino se tropieza sólo con leyes lógicas universales y definiciones, entonces se tiene una verdad analítica, donde se supone que también se toman en consideración las proposiciones sobre las que se apoya la admisibilidad de una definición. Pero, si no es posible hacer una demostración sin usar verdades que no sean de naturaleza lógica universal, sino que se refieran a un dominio del saber particular, entonces la proposición es sintética. Para

[11] Gl. 3. Frege usa aquí el giro "formar el contenido de la proposición en la conciencia", lo que contradice, evidentemente, la opinión de BIERICH, según la cual el uso terminológico freguiano de "contenido" e "imagen" en los "Grundlagen" es una expresión de la separación consecuente entre lo objetivo y lo subjetivo, entre lo lógico y lo psicológico, y corre paralelo a esta separación.

que una verdad sea aposteriori, se requiere que su prueba no se lleve a cabo sin apelar a los hechos, i. e. sin apelar a verdades indemostrables sin universalidad, que contegan enunciados sobre hechos determinados. Si por el contrario es posible llevar a cabo una demostración a partir de leyes universales, que ni necesiten ni admitan prueba, entonces la verdad es apriori" (Gl. 4).

Según ello, tomaremos en cuenta únicamente las combinaciones analítico (-apriori), sintético-apriori y sintético-aposteriori. En el último tipo podrá incluirse la teoría de HUSSERL, desde el punto de vista de la *Philosophie der Arithmetik,* así como la teoría de J. ST. MILL, cuya inconsistencia se hizo evidente, por primera vez, gracias a la crítica de FREGE en los *Grundlagen.*

La interpretación de la Aritmética [12] que MILL sustenta es extremadamente empirista. Piensa que todo saber es empírico. Por consiguiente, tampoco los enunciados numéricos pueden ser apriori. Según la opinión de MILL, las definiciones leibnizianas de los números, como "3=2+1", expresan hechos observados: "El hecho enunciado en la definición de un número es un hecho físico" (III 24, 5). Así, p. ej., "3=2+1" indica que ciertos grupos de cosas percibidos en la forma °o° pueden ser divididos en dos grupos de la forma oo, o. "Toda proposición aritmética enuncia que un determinado agregado ha podido formarse por combinación de otros agregados determinados o también por anexión de partes determinadas de un agregado; y que, consiguientemente, aquellos pueden producirse por inversión de este proceso" (ibíd.).

Los mismos números no son objetos independientes: "Todo número debe ser número de algo; por consiguiente, algo como número en abstracto no existe" (II 6, § 2). Cualquiera de los signos numéricos "2", "3", etcétera "denota un fenómeno físico y co-designa (connota) una propiedad física..., que incumbe a la colección de cosas que nosotros designamos con el nombre; y esta propiedad es la manera característica en que puede ser construida la colección y dividida en partes" (III 24, § 5).

A este empirismo extremo se opone FREGE enérgicamente. La afirmación de que las definiciones numéricas del tipo "3=2+1" tienen por base hechos físicos es totalmente increíble en el caso de números grandes: Pues, ¿qué hecho físico se enuncia en la definición, p. ej., del número 777864 y quién ha observado alguna vez un hecho tal? Esta interpretación (como la de HUSSERL) es totalmente insostenible en el caso de los números 1 y 0, cuyas bases no pueden estar constituidas por ningún hecho de la clase citada, "pues hasta ahora nadie ha visto ni tocado 0 guijarros" (Gl. 11), y ¿qué tipo de distribución podría conducir al número 1?

El hecho de que sean verdades inductivas las leyes universales (de acuerdo con las cuales MILL quiere derivar fórmulas numéricas a partir de números empíricos particulares) [13], debe serle ya dudoso a FREGE

[12] J. St. MILL, *A System of Logic Ratiocinative and Inductive, being a Connected View of the Principles of Evidence and the Methods of Scientific Investigation.* Londres 1843 (y frecuentes ediciones).

[13] Sobre la terminología, véase MILL, *System,* Libro II, c. vi, desde § 3.

cuando opina que "el método de la inducción sólo puede ser justificado mediante proposiciones universales de la Aritmética, siempre que no se entienda por esto una mera habituación", pues "la inducción debe apoyarse en la teoría de la probabilidad... Pero es inconcebible cómo esta doctrina pueda desarrollarse sin presuponer leyes aritméticas" [14].

FREGE considera verosímil "que las fórmulas numéricas se deriven de las definiciones de números singulares sólo mediante leyes universales apropiadas" (Gl. 12). Pero, si MILL cree que estas leyes universales son leyes de la naturaleza (por ejemplo, del tipo: 7 litros de líquido se obtienen al añadir 2 litros a 5 litros), entonces confunde el empleo de una proposición aritmética con ésta misma. Y si MILL toma como Referencia de una cifra la propiedad consistente en la manera característica de estar compuesto un agregado, entonces no sólo se opone al hecho de que, de las diferentes maneras en las que un agregado puede estar compuesto, ninguna sea designada como "característica", sino también contra la imposibilidad adicional de explicar los números 1 y 0.

Así parece, en general, dudoso que el número —como, por ejemplo, el color y la solidez— sea algo abstraído de las cosas. Si los números fueran, efectivamente, "abstractos" tales, en el sentido literal, entonces ¿no sería totalmente inexplicable el hecho de que no sólo sea denumerable lo perceptible físico, sino también, como ya dice LOCKE [15], "hombres, ángeles, acciones, pensamientos, cualquier cosa que exista o pueda ser imaginada"? "Sería milagroso, piensa FREGE, que una propiedad abstraída de cosas manifiestas pudiera ser trasferida a sucesos, imágenes, y conceptos sin cambiar de sentido" (Gl. 31).

Puesto que las dificultades con las que tropiezan las teorías de HUSSERL y MILL sobre enunciados numéricos radican, evidentemente, en el supuesto del carácter aposteriori (y no sintético) de los mismos, será interesante buscar otra base que los explique como sintéticos-apriori. En este sentido nos acercamos a KANT, quien ciertamente toma las proposiciones matemáticas como modelo de proposiciones sintéticas-apriori (KRV B 14).

Para KANT, fórmulas numéricas como "5+7=12" son indemostrables y sintéticas, pero "teme llamarlas axiomas, porque no son universales y porque su número es infinito" [16]. Por supuesto, KANT sabe que una proposición como "135664+37863=173527" no es evidente de modo inmediato; precisamente aduce este hecho en favor de la naturaleza sintética de tales proposiciones [17]. Pero olvida —cosa que FREGE señala— que este

---

También FREGE distingue entre fórmulas numéricas, que se refieren a números determinados (p. ej. "3=2+1"), y leyes generales, que valen para todos los números (p. ej. "a(b+c)=ab+ac").

[14] Gl. 16 s. La presunción de W. PAPST de que FREGE aquí ha "confundido la inducción empírica con la inducción matemática" (p. 14), debe resultar absurda a la vista de la univocidad del texto freguiano.

[15] "For number applies itself to Men, Angels, Actions, Thoughts, every thing that either doth exist, or can be imagin'd". J. LOCKE, *Essay*, II 16, § 1.

[16] Gl. 5 s. También, KRV B 205/206.

[17] Pg. A 29, KRV B 15.

mismo hecho va contra la indemostrabilidad de estas proposiciones, "pues, ya que no son evidentes de modo inmediato, ¿cómo deben comprenderse, sino mediante una prueba?" (Gl. 6). El intento de KANT de ayudarse con la intuición de dedos y puntos es, naturalmente, erróneo, puesto que hace que dichas proposiciones tengan un carácter empírico, lo que no es de hecho la intención de KANT. De esta dificultad tampoco le salva la apelación a una "intuición pura". FREGE concede, de antemano, que al defensor de la fundación sintético-apriorística no le queda más remedio "que apelar a una intuición pura como fundamento último del conocimiento, aunque hay que decir seriamente si es una intuición espacial o temporal o, en otro caso, qué pueda ser" (Gl. 18). Efectivamente, este término es vago. Cuando se dice en la "Crítica de la Razón Pura",

> "por medio de la sensibilidad nos son dados, asimismo, objetos y sólo ella nos proporciona intuiciones" (KRV B 33),

parece que "intuición" tiene un sentido mucho más amplio en la definición siguiente, en la que falta toda referencia a la sensibilidad sin la cual la intuición no puede servir como principio de conocimiento apriori para las proposiciones sintéticas:

> "La intuición es una representación singular (repraesent. singularis), el concepto una representación universal (repraesent. per notas communes), o representación *reflexionada* (repraesent. discursiva)" (Logik A 138).

En general parece que la expresión "intuición" no se ajusta a todas las situaciones, puesto que se pueden tener las más diversas intuiciones de 10 dedos y es dudosa la posibilidad de cualquier intuición de 135664 dedos. Por ello parece como si KANT hubiera reflexionado sólo sobre números pequeños. Si no se quiere sacar la conclusión de que KANT ha dejado totalmente en blanco la fundación de fórmulas numéricas para números grandes, ha de aceptarse que las consideró indemostrables. Incluso prescindiendo de esta "inelegante" solución (según la cual la validez de fórmulas numéricas de uno y el mismo tipo se funda en principios totalmente heterogéneos de acuerdo con la magnitud de los números incluidos), en cualquier caso ha de criticarse el hecho de que difícilmente se podrá señalar el límite a partir del cual la demostrabilidad deba sustituir a la intuición.

A la vista de estas dificultades, ¿qué induce propiamente a KANT a querer sustituir la interpretación leibniziana del carácter analítico de los enunciados numéricos por esta doctrina, no desarrollada evidentemente en sus consecuencias? FREGE sólo puede explicar este hecho en el sentido de que KANT ha minusvalorizado manifiestamente los juicios analíticos. KANT considera los juicios lógicos, y con esto también todos los analíticos, "vacíos", y puesto que interpreta a los últimos como simples "juicios de aclaración", restringe demasiado el concepto de juicio analítico. Su división de los juicios en analíticos y sintéticos no es exhaus-

tiva, pues sólo en el caso del juicio universal afirmativo "se puede hablar de un concepto-sujeto y preguntar si el concepto predicado está contenido en él por definición. Pero, ¿qué sucede si el sujeto es un objeto singular? ¿Qué sucede si se trata de un juicio existencial? Entonces no puede hablarse de un concepto-sujeto" (Gl. 100). La interpretación kantiana de la formación del concepto es, asimismo, demasiado estrecha: La determinación del concepto mediante "notas coordinadas", como base única, la considera FREGE "una de las formaciones conceptuales menos fructíferas" (ibíd.). Y precisamente en los conceptos matemáticos tenemos "no una serie de notas coordinadas, sino una conexión más interna... más orgánica de las determinaciones" (ibíd). Lo que se puede inferir a partir de una formación conceptual tal "no se puede abarcar de antemano con la mirada; aquí no se vuelve a sacar simplemente de un cajón lo que se ha metido en él. Estas consecuencias aumentan nuestro conocimiento, y, por tanto, se han de considerar sintéticas, de acuerdo con KANT; con todo, pueden ser demostradas de manera puramente lógica y son, por consiguiente, analíticas. Están, efectivamente, incluidas en las definiciones, pero no como la viga en la casa, sino como la planta en la semilla" (Gl. 100 s.). Así, FREGE no llega a una refutación rotunda, sino "a un perfeccionamiento del parecer de KANT" (Gl. 118 s.), al demostrar que los enunciados numéricos son juicios analíticos y, con todo, aumentativos del conocimiento [18]. En torno a ello se ha manifestado FREGE del modo siguiente:

"Para no atraer sobre mí el reproche de ser un criticomaníaco insignificante de un genio al que todos debemos admiración agradecida, creo que debo destacar la coincidencia entre nosotros. Para mencionar sólo lo más importante, veo una gran contribución de Kant en la distinción que establece entre juicios analíticos y sintéticos. Asímismo, al denominar a las verdades geométricas sintéticas y a priori, descubrió su esencia verdadera. Y este mérito ha de repetirse todavía ahora, porque se olvida a menudo. Aunque Kant se haya equivocado en lo que respecta a la Aritmética, creo que ello no perjudica esencialmente a su contribución. Lo que le interesó fue que había juicios sintéticos; es de escasa importancia que sólo ocurran éstos en la geometría o hagan también su aparición en la Aritmética" [19].

---

[18] El punto de vista logicista *no* conduce fatalmente a la consecuencia de que las proposiciones matemáticas son "vacías de contenido" (véase, p. ej., WITTGENSTEIN, Tract. 6.21: "La proposición de la Matemática no expresa ningún Pensamiento"). La diferencia aparente queda eliminada, si se distingue —de acuerdo con CARNAP— entre "valor lógico" y "valor cognitivo" (*Log. Aufb.* § 50, § 106 s.).

[19] Gl. 101 s. La existencia de lugares unívocos de este tipo hace incomprensible cómo se sigue aseverando que FREGE ha querido demostrar "la totalidad de la Matemática" —por lo tanto, también la Geometría— como puramente lógica o analítica. También NATORP parece que es de esta opinión, cuando reprocha a FREGE el haber querido eliminar de toda la Matemática la intuición pura. Todavía va más lejos la aserción de que FREGE "en general no" se ha ocupado de la esencia de la Geometría, ni siquiera en el artículo "Ueber die Grundlagen der Geometrie" (W. PAPST). Hay una exposición correcta en F. WAISMANN: *Einführung in das mathematische Denken. Die Begriffsbildung der modernen Mathematik.* 2.ª Edición. Viena, 1947 (1.ª Ed. 1936) vi y 65.

Las dificultades a las que se había buscado solución en todos estos intentos de fundación, considerados altamente filosóficos, condujeron ya, hacia principios del siglo XIX, a la reflexión de si no se podría fundar la Aritmética sin hacer referencia a los "contenidos", difícilmente accesibles, de los enunciados aritméticos. Se puede ver ya un punto de partida para ello en la prueba leibniziana de "2+2=4" realizada con ayuda de las definiciones "4=3+1", "3=2+1" y "2=1+1"[20], que sugirió el hecho de que en cálculos de tal índole se trataba de trasformaciones de expresiones, i. e. de un manejo "vacío" de figuras. FREGE consideró evidente que en tales manejos, aparentemente vacíos, se prescindía sólo temporalmente del contenido siempre presupuesto. Aun cuando MILL había adoptado la tesis formalista de las transformaciones "vacías" para explicarlas y rechazarlas por absurdas[21], FREGE creyó todavía en los *Grundlagen* que podía omitir esta crítica por ser puramente fantasmagórica: "MILL se vuelve aquí contra un formalismo que apenas es representado por alguien" (Gl. 22).

En ello se equivocaba. Todas las doctrinas formalistas que creen conseguir las llamadas extensiones del sistema numérico (p. ej., la extensión de los números racionales por medio de los irracionales), mediante la postulación simple de la validez de las reglas aritméticas precedentes[22], FREGE quiso refutarlas al indicar que ningún contenido es atribuido mediante un simple postulado a los signos numéricos establecidos formalmente, sino que lo que ha de hacerse es asegurar un contenido tal mediante una prueba existencial; sin embargo, se vio un poco más tarde frente a una doctrina formalista mucho más radical. Pues el teórico de funciones E. HEINE, para desembarazarse de la prueba molesta de la existencia, recurrió a explicar los números como ciertos objetos de indudable existencia: "Me acojo al punto de vista puramente formal en la definición, *puesto que denomino números ciertos signos concretos,* de modo que no puede cuestionarse la existencia de estos números"[23].

Esta interpretación ingenua, a primera vista fecunda, fue muy pronto desarrollada por el matemático de Jena J. THOMAE. Llevado por la con-

---

[20] *Nouveaux Essais* IV, § 10 (Erdm. 363).

[21] "La doctrina de que, mediante el simple manejo diestro del lenguaje, podemos descubrir hechos y desvelar eventos ocultos de la naturaleza, contradice el sentido común de manera tal que, para creerlo, deben haberse hecho algunos progresos en la Filosofía" *(System* II, 6 § 2).

[22] El llamado "principio de permanencia", introducido por HANKEL bajo el nombre de "principio de permanencia de leyes formales". La validez de este principio —que HANKEL mismo tilda de "metafísico" ocasionalmente— no se limitará sólo a la Matemática. Véase: H. HANKEL, *Vorlesungen über die complexen Zahlen und ihre Functionen.* I.: *Theorie der complexen Zahlensysteme, insbesondere* etc. Leipzig 1867. Sobre el principio de permanencia, también: G. STAMMLER, *Der Zahlbegriff seit Gauss. Eine erkenntnistheoretische Untersuchung.* Halle a. S. 1926. 58 ss. Además: F. KAMBARTEL, *Logische Stellung und konstruktive Bedeutung mathematischer Permanenzprinzipien,* en: Der Mathematikunterricht 7 (1961) 57-78.

[23] E. HEINE, *Die Elemente der Functionenlehre.* En: Journal für die reine und angewandte Mathematik (Crellé's Journal) 74 (1872) 172-188. Cita de la p. 173.

sideración de que, por ejemplo, una prueba de la trascendencia del número *e* no depende en modo alguno de la interpretación del número que tenga el matemático que realiza la prueba, desarrolló una doctrina que no pregunta qué son y qué deben ser los números, sino que pregunta qué necesitamos de los números en la Aritmética[24], y que ve en la Aritmética un cálculo puro, en el que, según ciertas reglas establecidas, siempre se obtienen nuevas trasformaciones de expresiones; así se trabajará, según ciertas reglas, en el cálculo como con figuras de ajedrez.

Podía ser tan fascinante esta analogía como pobre la situación de THOMAE para examinar totalmente los presupuestos propios o incluso sólo para llevar a la práctica consecuentemente el formalismo. Ya es oscuro en qué deben consistir las figuras iniciales. Parece que las cifras 0, 1, ..., 9 deben desempeñar estos papeles y que los restantes signos que aparecen en los enunciados aritméticos, con "=", "<", etc., sólo deben servir de conectores. Con todo, éstos perdían parcialmente significado al querer THOMAE comunicar *reglas en forma de igualdad,* por ejemplo, mediante "a+b=b+a" la regla

$$\text{“}a+b \Rightarrow b+a\text{”}.$$

También parece que THOMAE nunca ha intentado seriamente detallar un sistema de reglas completo para la Aritmética formal. En este intento él hubiera encontrado lo que más tarde supo HILBERT en una situación semejante: por este camino nunca pueden lograrse aserciones sobre series infinitas de números o funciones. Si se omite esto, entonces se "cae en aquellas incongruencias que FREGE censura con razón en sus reflexiones críticas sobre las definiciones habituales del número irracional"[25]. HILBERT recomendó como solución el hecho de que se puede "llevar la reflexión a un grado más alto, desde el cual los axiomas, fórmulas y demostraciones de la teoría matemática son, asimismo, objeto de una investigación matemática"[26]. "Por ello, las reflexiones materiales —de las

---

[24] JDMV 15 (1906) 434, coincidiendo casi literalmente con THOMAE, *Elementare Theorie der analytischen Functionen einer complexen Veränderlichen,* 2.ª Ed. Halle a. S. 1898. La formulación expresa lo contrario de DEDEKIND mediante la alusión a su obra *"Was sind und das sollen die Zahlen?"* (Braunschweig 1888, 10.ª Ed. 1965 (repr.)).

[25] D. HILBERT, *Neubegründung der Mathematik,* Erste Mitteilung. Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Hambruger Universität, I (1922) 157-177. Citado según HILBERT, *Ges. Abh.* III 165.

[26] Ibid. Con todo, parece que HILBERT confunde en este trabajo el primer y segundo punto de vista, en lo que respecta a bases filosóficas. Transfiere el punto de vista filosófico de la primera interpretación del formalismo a la segunda: "En cuanto que yo acepto este punto de vista, los signos mismos —en oposición a FREGE y DEDEKIND— se me constituyen en objetos de la teoría de números" (163). Pero está claro que los signos son los objetos de la *Metamatemática,* pero no los de la *Teoría de números.* La diferencia entre FREGE y HILBERT radica en que FREGE reconoce una Aritmética material y una Metamatemática (más estrictamente: Meta-Aritmética); por el contrario, HILBERT reconoce, evidentemente, sólo una Metamatemática, que se distingue de la Aritmética sólo en que, *además* de los signos numéricos, trata también de las proposiciones, demos-

que nunca se puede prescindir— son trasladadas a un nivel en cierto modo más alto" [27].

HILBERT ha sido el primero en llevar a efecto este plan. Con todo, el pensamiento mismo procede, sorprendentemente, de FREGE. Pues, tenemos el hecho, algo curioso, de que él, aunque enemigo del formalismo, ha hecho reflexiones mucho más profundas sobre la interpretación de la Aritmética formal como juego y ha examinado sus posibilidades y consecuencias de un modo mucho más claro que el formalista THOMAE. El resultado de FREGE puede resumirse en pocas palabras. Una Aritmética formal como juego es posible. Pero se presupone que se distinga rigurosamente entre el juego y la teoría del juego (a semejanza de la diferencia entre conceptografía y proposiciones sobre la conceptografía en el campo de la Lógica). "En el juego de cálculo no hay axiomas, ni demostraciones ni definiciones, pero sí en la teoría de este juego" (Gg II ix). Esto no es paradójico, sino exacto desde el punto de vista sostenido más tarde también por HILBERT: Se prescinde del contenido de los axiomas, demostraciones, etc., de la Aritmética material. Al decidirnos a considerar la Aritmética como juego, renunciamos a expresar algo sobre el contenido de sus proposiciones, demostraciones, etc. Objeto de la teoría del juego de cálculo son sólo las reglas y los signos y fórmulas aritméticas, consideradas sólo en su "forma externa", i. e. clases de figuras y grupos de figuras de forma semejante (Gg II 107). Si recurrimos a la analogía de THOMAE, entonces podemos decir: Así como nosotros en el ajedrez pasamos, según reglas, de ciertas posiciones de las figuras a otras posiciones, así en el juego de cálculo pasamos de ciertos grupos de figuras a otros según reglas fijas. Y así como en una teoría del ajedrez [28] podemos hacer enunciados sobre movimientos posibles, posiciones posibles y cosas por el estilo, así en una teoría del juego de cálculo "habrá teoremas que digan, por ejemplo, que se puede pasar de un cierto grupo de figuras a otro, de acuerdo con las reglas de juego" (Gg II 101).

Uno puede preguntarse entonces, ¿por qué no ha intentado FREGE llevar a cabo una construcción útil de la Aritmética formal, en lugar de gastar su tiempo en polémicas con los aritméticos formalistas? [29]. Podrán

---

traciones, etc..., en que aquellos ocurren. Por supuesto, se puede cuestionar dónde ha de establecerse, entonces, el nivel más alto en cuestión. Parece que el dicho místico. "En el principio es el signo" (l. c.) no puede fundamentar, sin embargo, la "posición firmemente filosófica", que Hilbert cree poseer.

[27] l. c. 165.

[28] Como *objeto* de la teoría se encuentra el ajedrez y no el "juego práctico de ajedrez", como THOMAE opinó en una ocasión en su discusión interminable (e infructífera) con FREGE (THOMAE, *Gedankenlose Denker, Eine Ferienplauderei.* JDMV 15 (1906) 434-438: FREGE, *Antwort auf die Ferienplauderei des Herrn Thomae,* ibid. 586-590; THOMAE, *Erklärung,* ibid. 590-2; FREGE, *Die Unmöglichkeit der Thomaeschen formalen Arithmetik aufs Neue nachgewiesen,* JDMV 17 (1908) 52-55; THOMAE, *Bemerkung zum Aufsatze des Herrn Frege,* ibid. 56; FREGE, *Schlussbemerkung,* ibid. 56).

[29] La opinión de FREGE es que las investigaciones metamatemáticas ni ahorran ni facilitan la construcción de la Aritmética material. FREGE se creyó en posesión de medios de construcción tales que garantizaban la ausencia de contradicción

alegarse varias razones. La razón más importante para FREGE era que la posibilidad de una consideración metamatemática de la Aritmética no puede significar que usamos los signos sin Referencia al hacer enunciados en la Aritmética misma. Una segunda razón era que debemos conocer primero una justificación de por qué se han elegido exactamente unas reglas para el "juego de cálculo" y no otras. Ambas cuestiones están íntimamente relacionadas: "Si hubiera que tomar en cuenta un Sentido, entonces no podrían establecerse arbitrariamente las reglas, sino que deberían instituirse de modo que a partir de fórmulas, que expresasen Pensamientos verdaderos, sólo pudieran derivarse fórmulas que expresasen igualmente Pensamientos verdaderos. De este modo se abandona el punto de vista de la Aritmética formal" (Gg II 100). Con todo, se trata de una exigencia mínima que debemos establecer en todo cálculo lógico [30]. Nos hace falta todavía un hilo conductor con el cual podamos orientarnos en la construcción del juego, para que el cálculo concluido sea interpretable como *Aritmética.* Este hilo conductor es precisamente —dice FREGE— la Aritmética material, que se debe tener en cuenta antes de que se pueda pensar en la construcción de un cálculo. Aunque FREGE lo exprese algo burlonamente diciendo que la Aritmética formal es "comparable a una enredadera que trepa sobre la Aritmética material y que pierde todo asidero, si se le quita este apoyo y fuente de nutrición" [31], no se le puede eliminar a la ligera, como si fuera superficial o de miras estrechas. El hecho de que la simple interpretación de un sistema axiomático de la Aritmética no pueda valer como *Fundamentación* de la Aritmética, sino que él mismo necesita fundamentación, es algo siempre válido [32]; y merece todavía hoy nuestra admiración el que FREGE haya intentado solucionar de un solo golpe el problema fundamental y la ex-

---

en su construcción de la Aritmética. Esta convicción se hundió con el descubrimiento de la antinomia russelliana; con todo, este descubrimiento hizo demostraciones de no-contradictoriedad con medios metamáticos sujetos a grandes exigencias. Sólo por este tiempo comenzaron a desarrollarse métodos metamatemáticos; véase, p. ejemplo, los esfuerzos de FREGE, en demostraciones de independencia semántica en su último artículo sobre los fundamentos de la Geometría.

H. SCHOLZ y F. BACHMANN, en su comunication "*Der wissenschaftliche Nachlass von Gottlob Frege*" (en el Congreso Internacional de Filosofía Científica, París 1935), manifestaron el siguiente hecho, hasta entonces nunca observado en la literatura sobre FREGE: "En el curso de una extensa correspondencia, que debía ser publicada, LOEWENHEIM —a partir de "*Grundgesetze der Arithmetik*" vol. II § 90 —consiguió convencer a FREGE de la posibilidad de construir de modo inobjetable la Aritmética formal. (1. c. p. 29). De esta comunicación no se desprende si esta correspondencia se encuentra o no en Münster; actualmente no está allí. Mis pesquisas tras esta correspondencia, que sería de gran interés, no han tenido éxito hasta ahora.

[30] Véase también H. SCHOLZ, *Die Sonderstellung der Logik-Kalküle im Bereich der elementaren logistischen Kalkülforschung.* En: Travaux du IX Congrès international de philosophie (Congrès Descartes) 6: Logique et Mathématiques, Paris 1937, 40-42.

[31] JDMV 17 (1908) 55.

[32] En este punto debemos contradecir de nuevo a W. PAPST, que cree que la moderna formulación del formalismo ha vuelto irrelevantes las objeciones de FREGE.

plicación de la utilidad —que "eleva la Aritmética sobre el juego a la categoría de una ciencia" [33]— mediante la pormenorización de un modelo lógico (logrado mediante el análisis de los enunciados numéricos).

Si se sigue en este punto a FREGE y se analizan los enunciados numéricos como todos, en lugar de buscar la Referencia de los términos numéricos aislados, entonces se conoce la inutilidad de la teoría de la abstracción (tanto milliana como husserliana) en que enunciados como "esto es un (!) grupo de árboles" y "esto son cinco (!) árboles" pueden ser referidos al mismo todo del mundo material, del cual, sin embargo, no pueden abstraerse ambos, el 1 y el 5. Con todo, el ejemplo de estas dos proposiciones, que sólo difieren en la sustitución del concepto "grupo de árboles" por el concepto "árbol", sugiere que una aserción numérica contiene un enunciado sobre un concepto. Según el análisis de FREGE, en el enunciado "Venus tiene 0 satélites" la propiedad de no poseer nada bajo sí es atribuida al concepto "satélite de Venus". Esta interpretación, que constituye la base de la construcción logicista, aclara al mismo tiempo por qué se ha intentado tan a menudo explicar el número como un producto de abstracción: A partir de las cosas se obtiene, por abstracción, el concepto, en el que se descubre el número, de modo que aquí la abstracción precede inmediatamente a la formación del juicio numérico. ¿Qué podía parecer más indicado que considerar este juicio como producto de abstracción? Por otro lado, la abstracción no es el único medio de obtener un concepto; por ejemplo, se pueden lograr nuevos conceptos mediante combinación de notas dadas (sólo se pueden alcanzar así los llamados conceptos vacíos), y tampoco se han agotado con esto las posibilidades de construir conceptos.

La comprensión de que los enunciados numéricos son enunciados sobre conceptos limita las posibilidades de definición para el concepto de número, pero no fija todavía esta definición. *Un primer intento* consistiría en lo siguiente: Se adjunta el número 0 a un concepto, si está vacío; se adjunta el número 1 a un concepto no vacío, si a partir de las proposiciones "a cae bajo F" (donde "F" designa el concepto) y "b cae bajo F" se sigue en general que a y b son lo mismo; y, en general, el número n+1 corresponde a un concepto F, si hay un objeto *a* que cae bajo F y es tal que el número n corresponde al concepto "cayendo bajo F, pero no *a*". A pesar de su aparente claridad, este primer intento resulta insatisfactorio. Pues por este medio no convendrá un sentido a los signos "0", "1", etc., sino sólo a las expresiones "El número 0 corresponde a...", "El número 1 corresponde a...", etc. La conclusión es que, de este modo, no podemos decidir si un objeto dado es un número o no (p. ej., si Caesar es o no un número), y que, a partir de la proposi-

[33] Gg. II 100. En efecto, según CARNAP *(Log. Synt.* 254), no se puede derivar "a partir de la proposición 'En esta habitación sólo están ahora Carlos y Pedro, y nadie más' la proposición 'En esta habitación sólo están ahora dos personas' con ayuda de los medios del cálculo lógico-matemático solamente, como ordinariamente creen los formalistas; pero sí puede hacerse mediante los sistemas logicistas, esto es, a partir de la definición de FREGE de '2'".

ción de que al concepto F le corresponden tanto el número a como el b, no podemos demostrar que a=b.

Es incomprensible cómo NATORP pudo cometer el grave error de considerar este primer intento (que expresamente tachó FREGE de insatisfactorio) como la definición freguiana de número, y someterlo a una crítica prolija. Su crítica, lanzada como refutación del logicismo de cuño freguiano, cae por consiguiente en el vacío[34].

En un segundo intento, FREGE —de acuerdo con una máxima establecida en la "Introducción"— quiere obtener el concepto de número mediante determinación del Sentido de enunciados sobre números. Después de haber hecho plausible en el párrafo 57 el hecho de que los números fuesen objetos, hay que determinar el contenido de un juicio de reconocimiento aplicado a objetos tales, i. e. una ecuación entre números:

"Nuestra interpretación es que, al formar el contenido de un juicio que puede interprearse también como una ecuación, cada parte de esta ecuación es un número" (Gl. 74).

La igualdad para números no debe aclararse tomando como base la introducción de números, sino que los números deben, por el contrario, introducirse bajo el empleo de la igualdad.

"Por supuesto parece que éste sea un tipo de definición muy insólito, que no ha sido bastante considerado por los lógicos; pero el hecho de que no sea inaudito lo muestran algunos ejemplos" (Gl. 74).

Se expone entonces que se puede interpretar como una ecuación el juicio "la recta *a* es paralela a la recta *b*" y que por este medio se obtendría el concepto de dirección, formulado

"La dirección de la recta a es igual a las dirección de la recta b".

Lo que sucede en este cambio de "a//b" a "$\vec{a}=\vec{b}$", lo describe FREGE con una imagen ya usada en el *Begriffsschrift*:

"Sustituímos el signo // por el más universal =, en cuanto que distribuímos el contenido peculiar del primero en a y b. Separamos el contenido de un modo distinto del original y logramos por este medio un nuevo concepto" (Gl. 75).

De manera totalmente análoga se ha de poder obtener los conceptos de posición de planos, de forma de triángulos (a partir de la semejanza) y, finalmente, de número. En este lugar, por supuesto, hay que tener cuidado de no caer en un error. Un examen de FREGE dará por resultado que un tránsito tal (una "transformación" o "trasposición" de una rela-

[34] P. NATORP: *Die Logischen Grundlagen der exakten Wissenschaften*. Leipzig y Berlín 1910. Anotado por P. E. B. JOURDAIN (Recensión del libro natorpiano). MIND 20 (1911) 522-560. Véase, además, J. J. MAXWELL, MIND 21 (1912) 302-3 y JOURDAIN, ibid. 470-1.

ción de equivalencia en una igualdad entre "objetos abstractos") es posible por un recurso lógico (introducido por FREGE). Aunque FREGE declare expresamente que podrían concebirse también otros métodos distintos del suyo, lo decisivo es que considera necesaria una justificación de los tránsitos en cuestión. El que especifique además que la ejecución de estas trasposiciones no puede valer como definición de objetos abstractos, señala ya un progreso notable respecto del punto de partida acrítico del Escrito de Habilitación de 1874, donde dice:

"Si podemos juzgar en cada caso si unos objetos coinciden en una propiedad, tenemos evidentemente el concepto correcto de la propiedad. En cuanto que declaramos bajo qué circunstancias hay una igualdad de magnitudes, determinamos el concepto de magnitud. Un tipo de magnitud —p. ej., la longitud— es, según esto, una propiedad en la que un grupo de cosas, independientemente de su orden interno, puede coincidir con una cosa singular del mismo tipo... Esta determinación de un concepto tiene, naturalmente, un contenido esencial, siempre que la propiedad pensada permita un margen de libertad tal que las cosas también puedan no coincidir en ella" [35].

Con todo, SCHWEITZER ha señalado [36] con razón que, a partir de la observación de FREGE en los *Grundlagen* de que este método "no es inusitado", no puede inferirse su aprobación general de tránsitos tales, ni mucho menos, pues, su aprobación como definiciones [37]. Esto mismo lo ha rechazado FREGE en el caso de las transformaciones en cuestión (que son designadas "definiciones" sólo en el sentido formal, y más exactamente "intentos definicionales"). Este hecho se obtiene a partir de la consideración de tres "dificultades" expuestas por él, que son explici-

---

[35] G. FREGE: *Rechnungsmethoden, die sich auf eine Erweiterung des Grössenbegriffes gründen* (Escrito de Habilitación) Jena 1874, p. 2. Véase: Gg II 70 n (—71).

[36] H. SCHOLZ y H. SCHWEITZER: *Die sogenannten Definitionen durch Abstraktion. Eine Theorie der Definitionen durch Bildung von Gleichheitsverwandtschaften* (Volumen 3 de las Investigaciones sobre Logística y sobre la Fundación de las Ciencias Exactas, editado por H. SCHOLZ) Leipzig 1935 (p. 102). La reimpresión de esta magnífica obra, planeada por la Wissenschaftliche Buchgesellschaft (Darmstadt, 1964), no ha podido realizarse a causa de la reducísima suscripción.

[37] Hay que distinguir entre ambos. Frente a la opinión de FREGE en el escrito de Habilitación de 1874, una transposición no proporciona ningún concepto unívoco de magnitud, puesto que, p. ej., de la congruencia de dos líneas rectas se puede pasar tanto a la igualdad de sus longitudes como a la superficie del cuadrado constructible sobre éllas. Pero aunque según esto debe ponerse en tela de juicio el carcter definicional de estas conversiones, nada impide las transposiciones mismas. Una actitud posterior de FREGE, respecto del tema abordado en 1874 se encuentra en Gg. II 70 n (—71) como observación al uso de PEANO del signo de igualdad. Si de dos cuerpos de igual volumen se dice que el volumen de uno es igual al del otro, entonces "los signos que se encuentran a ambos lados del signo de igualdad... no son signos de los cuerpos, sino de sus volúmenes... o también (¡) de las cantidades, que se obtienen por la medición de este volumen" (l. c.). Puesto que volumen y cantidad son distintos, no se ha definido ningún concepto unívoco (i. e. ninguno) de magnitud. Así como en caso de dirección de vectores se trata sólo de una "determinación", así en las transposiciones en cuestión "los objetos son sometidos a nuevas determinaciones (modi)" (l. c.). Este ejemplo es anterior al de PADOA de 1904: véase: SCHOLZ y SCHWEITZER, pp. cit. 42 s.

tadas en el ejemplo del paralelismo y la dirección. La primera dificultad, sobre si aquí no es definida la igualdad (de dirección) en lugar de la dirección, y la segunda dificultad sobre si la igualdad entre nuevos objetos obtenidos (dirección de...) no podría contradecir la igualdad corriente, pueden disiparse si se toma, de acuerdo con LEIBNIZ y FREGE, la igualdad como sustitutividad salva veritate, y esta sustitutividad puede demostrarse en cada caso que se presente:

"Para justificar nuestro intento de definir la dirección de una recta, debemos demostrar también que se puede sustituir siempre

la dirección de a

por

la dirección de b,

si la recta a es paralela a la recta b. Este hecho se simplifica por cuanto que no conocemos sobre la dirección de una recta ningún enunciado distinto del de su coincidencia con la dirección de otra recta. Por consiguiente, sólo necesitamos demostrar la sustitutividad en tal igualdad o en los contenidos que como componentes posee dicha igualdad. Primero deben ser aclarados todos los demás enunciados sobre la dirección y podemos fijar para estas definiciones la regla de que debe preservarse la sustitutividad de la dirección de una recta por la de otra paralela a ella" (Gl. 77).

Parece que se ha olvidado hasta aquí que las últimas proposiciones contienen ya una anticipación o, al menos, una preparación de aquella propiedad de la construcción conceptográfica de los *Grundgesetze,* que ha sido interpretada por algunos investigadores de la llamada Escuela de Münster como un tipo peculiar de constructividad (v. *infra*).

Pero queda una tercera dificultad, según la explicación de la igualdad como sustitutividad salva veritate, puesto que, según esta explicación, la fórmula de trasposición no dice

"nada sobre si la proposición 'la dirección de a es igual a q' ha de afirmarse o negarse, si q no ha sido dado ya en la forma 'la dirección de b'" (Gl. 78).

El círculo vicioso que nos amenaza ahora ("q es una dirección, si hay una recta b, cuya dirección es q") no puede eludirse proponiendo que se interprete como dirección q sólo en el caso de que sea introducido mediante trasposición de un enunciado de paralelismo, pues entonces

"se trataría la manera de ser introducido un objeto q como su propiedad, lo que ella no es. La definición de un objeto no enuncia, como tal, nada sobre él, sino que fija la Referencia de un signo" (Gl. 78; cf. también Gg I 18 n 1).

Esta salida presunta debería presuponer "que un objeto sólo puede darse de una única manera", mientras que "el uso multívoco y significativo de las ecuaciones... afecta a que se pueda reconocer algo, aunque sea dado de maneras diferentes" (Gl. 78-79).

Puesto que, asimismo, la trasformación sin más no proporciona medio

alguno de decidir si "$\vec{a}=q$", si "q" no tiene ya la forma "x", y puesto que esta situación acontece en toda trasformación de esta naturaleza, FREGE saca la conclusión de que

"no podemos obtener entonces ningún concepto, claramente delimitado de la dirección y, por estos mismos motivos, ningún concepto de número" (Gl. 79).

Por consiguiente deberá hacerse el intento, bajo todos los aspectos más difícil, de sustituir mediante definiciones explícitas y libres de error los ensayos definicionales, que abarcan trasformaciones de enunciados sobre relaciones. FREGE logra el éxito en este intento en virtud de la consideración heurística de que en el paralelismo de las rectas a y b (y sólo entonces) la extensión del concepto "recta paralela de la recta a" es igual a la extensión del concepto "recta paralela de la recta b". Puesto que este éxito se alcanza en el intento definicional

"La dirección de la recta a es la extensión del concepto 'paralela de la recta a', (*)

FREGE busca una relación que, en el caso de los números, corresponda al paralelismo en el caso de las direcciones. Encuentra esta relación entre dos conceptos, a los que se aplica un mismo número, en la posibilidad de "aplicar biunívocamente los objetos que caen bajo un concepto sobre los que caen bajo el otro concepto" (Gl. 79). Esta biunivocidad puede expresarse con los instrumentos del tercer capítulo del *Begriffsschrift* sin hacer uso del concepto de número. FREGE denomina a esta relación la relación de la "igualdad numérica" y la define:

"El número que corresponde al concepto F es la extensión del concepto 'numéricamente igual al concepto F'" (Gl. 79-80). (**)

El enunciado "n es un número" tiene el mismo significado que "hay un concepto tal que n es el número que le corresponde". Sobre estas bases, puede aclararse:

"0 es el número que corresponde al concepto 'desigual consigo mismo',
"1 es el número que corresponde al concepto 'igual a 0'" (Gl 90).

Con la definición de la relación de sucesión, dada ya en el *Begriffsschrift,* puede demostrarse entonces que 1 es el sucesor inmediato de 0. Además, se puede demostrar que a cualquier número le sigue un número en la serie de los números naturales y que ningún número finito se sigue a sí mismo en esta serie, por lo que la serie es infinita. Y, finalmente, puede demostrarse también que "el tipo de inferencia de $n+1$ a partir de n, que usualmente es considerado como propiamente matemático, depende de tipos de inferencia lógicos generales" (Gl. 118).

Las particularidades de su cumplimiento que, por lo demás, pueden

encontrarse en su formulación moderna en los *Foundations de* BETH [38], no nos interesan aquí.

En su lugar queremos dejar perfectamente claro lo que ha sucedido en la definición de número de FREGE. Evidentemente, las explicaciones (*) y (**) pueden valer como definiciones explícitas sólo si el sentido de la expresión "extensión del concepto..." es conocido de antemano. FREGE no oculta este hecho: "Presupongo que se sabe lo que es la extensión de un concepto" (Gl. 80 n). Hubiera sido interesante saber qué hubiera respondido él a una pregunta directa sobre qué es la extensión de un concepto. En cualquier caso, su presupuesto nos parece tan esencial que sólo difícilmente comprendemos cómo FREGE, de pasada, puede decir: "No pongo tampoco en el empleo de la extensión de un concepto ningún peso decisivo" (Gl. 117). Pues, aunque ello se diga evidentemente a la vista de algún otro recurso válido para resolver las "dificultades" arriba mencionadas, sin embargo FREGE mismo no da la mínima indicación de una posibilidad tal y presta —contra la precisión acabada de enunciar— a las extensiones conceptuales un peso decisivo cuando, en la conclusión, bosqueja su plan para introducir los llamados números grandes:

> "Finalmente también en la definición de números fraccionarios, complejos, etc. todo depende de encontrar un contenido enjuiciable que pueda ser convertido en una ecuación, cuyas partes sean precisamente los nuevos números. Con otras palabras: Debemos fijar el Sentido de un juicio de reconocimiento para tales números. Por ello, hay que considerar las "dificultades" que en relación con una transformación de esta índole hemos discutido (§§ 63-68). Si procedemos del mismo modo que allí, entonces los nuevos números nos son dados como extensiones de conceptos" (Gl. 114 s)

Como antes, FREGE se atiene al esquema fundamental, en cuyo marco la tercera dificultad —insalvable para las trasformaciones usuales— es superada mediante un recurso, del que el mismo FREGE dice al final de los *Grundlagen*: "Este modo de superar la dificultad no será aprobado por todo el mundo" (Gl. 117). De hecho, el recurso a la familiaridad con extensiones conceptuales y sus propiedades no carece de riesgos. En general, ¿hay algo así como un "conocimiento intuitivo" de las extensiones conceptuales? FREGE, que, como siempre, no toma muy en serio la introspección, hace una proposición seductora por su claridad: lo que se entiende por una extensión conceptual "es iluminado por los enunciados primitivos que pueden ser hechos sobre extensiones conceptuales" (Gl. 80). Entre éstos se encuentra, en cualquier caso, la igualdad de dos extensiones conceptuales. Pero a ésta son añadidas todas las igualdades entre objetos abstractos por el recurso freguiano de definir los objetos abstractos mismos como extensiones conceptuales. Pues, si tenemos una relación de equivalencia $\xi \sim \zeta$ y designamos "$\Phi(\xi)$" al concepto "$\xi \sim a$" y "$\Psi(\xi)$" al concepto "$\xi \sim b$", y definimos de acuerdo con FREGE $\tilde{a}$ como

[38] E. W. BETH: *The Foundations of Mathematics*. Amsterdam 1955 (Studies in Logic and the Foundations of Mathematics) § 108 (pp. 356 ss.).

la extensión del concepto $\Phi(\xi)$ y $\tilde{b}$ como la extensión del concepto $\Psi(\xi)$, entonces el enunciado "$\tilde{a}=\tilde{b}$" es equivalente al enunciado "la extensión del concepto $\Phi(\xi)$ es igual a la extensión del concepto $\Psi(\xi)$".

En este lugar no es superflua una indicación de por qué el concepto, cuya extensión debe coincidir con los objetos abstractos deseados, debe ser indicado expresamente. No es posible transformar unívocamente una relación de equivalencia dada en una igualdad de extensiones conceptuales, pues como tal pueden interpretarse todas las igualdades de objetos abstractos, las cuales se encuentren a partir de la relación de equivalencia. Se aclara esto en el ejemplo del paralelismo de dos rectas a y b en el plano euclídeo, puesto que esta relación puede transformarse no sólo en la igualdad de las direcciones de a y b, sino también en la igualdad de la dirección divergente de una recta (y con ello de todas) perpendicular a ellas. Por consiguiente, junto a

$$a \,//\, b \Rightarrow \vec{a}=\vec{b}$$

se podría justificar también como transformación legítima

$$a \,//\, b \Rightarrow \overline{\overline{a}}=\overline{\overline{b}}$$

mediante la definición explícita de $\overline{\overline{a}}$ como la extensión del concepto "perpendicular a la recta a".

La totalidad del método freguiano para justificar las transformaciones de relaciones de equivalencia en igualdades entre objetos abstractos, efectuadas, a decir verdad, no erróneamente, pero sí sin prueba de su rectitud (o mejor dicho, su sustitución a base de definiciones explícitas) depende evidentemente de la legitimidad de los enunciados usados sobre extensiones conceptuales. Se puede sospechar que FREGE no se dio perfecta cuenta de esta situación, a la que no se da la debida importancia todavía en los *Grundlagen,* en el intento de llevar a cabo la construcción logicista de la Aritmética en detalle. En la fundación lógica de los *Grundgesetze* de 1893 analiza FREGE detalladamente las extensiones conceptuales, aceptadas hasta entonces sin criticar a partir de la Lógica (tradicional) contemporánea suya, e intenta a su vez fundar los enunciados hechos sobre ellas. Pero la comprensión de este intento presupone el conocimiento del concepto de función característico de la "segunda doctrina del juicio", así como unas cuantas nuevas formaciones del concepto, que en el siguiente capítulo se desarrollarán.

1.3. LA JERARQUIA DE FUNCIONES

Cuando FREGE comienza a llevar a la práctica de modo rigurosamente conceptográfico la construcción logicista de la Aritmética en los *Grundgesetze der Arithmetik,* sus opiniones lógicas se habían profundamente desarrollado frente a las sostenidas en el *Begriffsschrift* y en los *Grundlagen.* Este cambio es tan decisivo que intérpretes como Bierich, Papst, Scholz, etc., han hablado del comienzo de un "segundo período" del pensamiento freguiano hacia el año 1890. Sin duda, esta opinión está justificada. No es contradicha por la posibilidad de acentuar la continuidad en las opiniones freguianas, de la que nos valemos para el manejo de cuestiones especiales, tal como hemos hecho en el presente trabajo. Asimismo, la limitación a sólo dos períodos parece fundada, puesto que —según todo lo que se puede decir hoy— los restantes cambios de puntos de vista de FREGE son de importancia absolutamente secundaria frente al que significa 1890.

La fecha se apoya en la aparición de tres trabajos de FREGE, íntimamente conectados: La conferencia de 1891 "Function und Begriff", y los dos artículos "Ueber Sinn und Bedeutung" y "Ueber Begriff und Gegenstand" de 1892. En ellos se expone más prolijamente la interpretación fundamental lógica, que estaba únicamente —aunque también expresivamente— bosquejada en los *Grundgesetze*; de modo que, para la comprensión de sus opiniones y supuestos filosóficos, estos trabajos son mucho más fecundos que la obra capital freguiana.

En el artículo "Ueber Sinn und Bedeutung", FREGE analiza en dos componentes significativos lo que en el sentido usual y general se entiende por "significado" de una expresión lingüística. Dichos compomentes pueden distinguirse como lo que la expresión *designa* y lo que *expresa.* FREGE denomina al primer componente *Referencia* y al segundo *Sentido* de la expresión —y con ello introduce una terminología que será obligatoria para todos los escritos posteriores a 1890. En los nombres propios (entre los cuales FREGE coloca también las descripciones unívocas) la Referencia es el objeto designado y el Sentido es el "modo de darse de lo designado" mediante la expresión. FREGE intenta hacer extensiva esta distinción también a otras expresiones lingüísticas: Las proposiciones. Así en las proposiciones independientes, por ejemplo las llamadas proposiciones principales, la Referencia será "lo Verdadero" o "lo Falso", por consiguiente el valor de verdad de la proposición, mientras que el Sentido consistirá en el Pensamiento expresado. En proposiciones dependientes, como las proposiciones subordinadas, la cosa se complica, como más tarde —cuando atendamos a la problemática de Sentido y Referencia— expondremos con mayor detenimiento.

Para el programa logicista la distinción entre Sentido y Referencia era menos importante que la de función y objeto establecida en los otros dos escritos de 1891-92. "Función" designaba en el *Begriffsschrift* sólo un tipo determinado de expresión lingüística, por consiguiente algo perteneciente de modo total a la esfera de los signos; sin embargo, en "Function und Begriff" se habla de expresiones funcionales y de funciones, distinguiéndose, por tanto (como ocurrirá siempre en los escritos posteriores), entre la expresión funcional y su Referencia, la función. Para aclarar el concepto de función, partimos de expresiones lingüísticas que se relacionen con funciones en el sentido matemático original. Séannos dados (p. ej.) los números 3, 18, 132 mediante las expresiones

"$2 \cdot 1^3+1$"
"$2 \cdot 2^3+2$"
"$2 \cdot 4^3+4$".

Diremos entonces que son dados como valores de una y la misma función, y consideraremos "$2 \cdot \xi^3+\xi$" como expresión de esta función. En ella la letra "ξ" señala los lugares en los que pueden introducirse nombres de objeto (aquí, signos numéricos); y el doble uso de la misma letra indica que, al introducir un nombre en uno de los lugares señalizados, debe introducirse el mismo nombre de objeto en el otro. Puesto que, según esto, las letras señalizadoras no refieren nada, sino que tan sólo indican indeterminadamente algo, lo decisivo para la designación de la función debe encontrarse en la parte restante de la expresión y en los tres nombres de valores, de los que hemos partido en nuestro ejemplo (independientemente de los nombres de objeto introducidos)[1]. Esto significa que lo fundamental de la función radica en la correlación que establece entre las Referencias de los nombres de objeto introducidos y las Referencias de los nombres de objeto obtenidos, i.e. entre los argumentos y los valores. La formación de un nuevo nombre de objeto mediante la "introducción" de nombres de objeto en una expresión funcional es posible sólo porque esta última contiene "lugares vacíos" para la admisión de nombres de objeto, porque —como dice FREGE metafóricamente— está "necesitada de complemento", "incompleta", "insaturada". Los

[1] Por ello, "$2\cdot\xi^3+\xi$" y "$2\cdot\zeta^3+\zeta$" (no sólo) expresan la misma función, sino que son la misma expresión funcional. Puesto que ambas se diferencian entre sí como grupos de figuras, para no tener que introducir una igualdad de Referencias ya en este plano, nos acogemos a la convención usual: denominamos "lugares argumentales emparentados" a aquellos lugares de una expresión, ocupados por la misma letra señaladora (por lo tanto, aquellos lugares de una expresión en los que han de introducirse los mismos nombres objetuales); de modo que la convención establece que, en una expresión, que contenga un único lugar argumental, debe ser usada la letra "ξ"; si hay otro lugar argumental, no emparentado con el primero, entonces ha de señalársele mediante "ζ" (y lo mismo se hará con los emparentados con él). Obsérvese que las letras señaladoras pertenecen sólo a la exposición de la conceptografía y que no ocurren en la construcción conceptográfica de la Lógica y de la Aritmética.

nombres de objeto, por su parte, son "completos" y "perfectos en sí mismos", de modo que tenemos dos categorías diferentes de signos: Nombres de objeto y nombres de funciones, i.e. expresiones completas e incompletas.

Si se conecta esta interpretación de FREGE con aquella otra que ve en los valores veritativos objetos —a saber, las Referencias de proposiciones independientes—, entonces se obtiene un nuevo fundamento para la doctrina del concepto. Para explicar este hecho, procurémonos, mediante la introducción de los nombres propios "Caesar", "Frege", "2" y "Zugspitze", las siguientes proposiciones completas:

"Caesar conquistó las Galias"
"Frege conquistó las Galias"
"2 conquistó las Galias"
"Zugspitze conquistó las Galias".

Todas estas proposiciones tienen pleno sentido, puesto que se admiten, como argumentos cualesquiera, objetos, en virtud de la ampliación freguiana del concepto de función [2]; por el contrario, la primera proposición refiere lo Verdadero, mientras que las restantes refieren lo Falso. Ahora bien, la expresión "... conquistó las Galias" es, evidentemente, una expresión funcional, mientras que, a su vez, designa un concepto: el concepto "Conquistador de las Galias". Por consiguiente, los conceptos no son en la lógica freguiana otra cosa que funciones monádicas, que tienen, como argumentos, objetos y, como valores, valores de verdad.

---

[2] Pero hay que admitir como argumentos sólo objetos y, en general, sólo argumentos de uno y el mismo tipo para un lugar argumental dado. Parece que CARNAP olvida este hecho, cuando en su "Logische Syntax der Sprache" —donde atribuye la derivabilidad de la antinomia de RUSSELL en el sistema de FREGE a dos errores de FREGE— explica: "El primer error de FREGE radica en que considera que todas las expresiones (más exactamente: todas las expresiones, que comiencen con el trazo de juicio) o son verdaderas o falsas. De modo que considerará falsa cualquier expresión, en la que se atribuya un argumento, no adecuado, a algún predicado. Fue RUSSELL el primero en introducir la división tripartita en expresiones verdaderas, falsas y sin sentido, que tan importante devendría en el desarrollo posterior de la Lógica y en su aplicación a la ciencia empírica y a la Filosofía; según él cualesquiera expresiones con argumentos no adecuados no son ni verdaderas ni falsas, sino sin sentido (en nuestra terminología: no son proposiciones). Si se corrige este primer error de FREGE, entonces no puede volver a derivarse de su sistema la antinomia de lo 'impredicable'; pues la definición debería contener la expresión antisintáctica 'F (F)' "(op. cit. 99). Pero esta antinomia ya no es derivable en el sistema de FREGE, puesto que tampoco para FREGE es lícita la expresión "F (F)". Es cierto que se puede introducir en un lugar argumental dado cualesquiera argumentos del *tipo prescrito* (objetos, funciones de primer grado, etc.) y que es ilícita una limitación, p. ej., de objetos a números. Los argumentos deben ser siempre adecuados, en caso contrario la expresión no está "correctamente formada" (Gg I 41 a, 45), i. e. es sin Sentido, o, como CARNAP dice, "antisintáctica". En particular esto vale de la expresión "F (F)", sobre la cual escribe FREGE en una carta a RUSSELL del 22.6.02: "Me parece que no es exacta la expresión 'un predicado es predicado de sí mismo'. Como regla, un predicado es una función de primer grado, que requiere un objeto como argumento y que no puede tenerse a sí mismo como argumento (sujeto)".

De la identificación, así practicada (recordando lo que en el *Begriffsschrift* se entendió por función), se podría desear inferir una igualdad entre conceptos y *expresiones* funcionales especiales. Con todo, ello sería un sofisma. En el texto del *Begriffsschrift* nunca son relacionados función y concepto; sólo en el prólogo parece que se alude a una conexión tal, al establecerse que "la interpretación de un contenido como función de un argumento tiene como efecto la formación de un concepto" (Bs. vii). Si los *Grundlagen* no hubiesen renunciado, en general, al término "función", podría verse en esta aserción la primera indicación del concepto de función posterior.

De hecho, FREGE se encontraba muy lejos de la idea curiosa de querer colocar los conceptos en el plano de los signos, y el imputársele una opinión tal puede apoyarse sólo en la errónea exposición (habitual), según la cual FREGE designó tras 1890 como "función" lo mismo que había entendido por "función" en el *Begriffsschrift* y que allí atribuía, erróneamente, a la esfera de los signos [3]. La situación real es que FREGE en el *Begriffsschrift* y en los *Grundlagen* —donde sólo distinguió entre signos y contenidos— creyó que bastaba con la descripción de nombres propios (signos) y expresiones funcionales en la exposición de las leyes lógicas, mientras que la distinción entre expresión, Sentido y Referencia, una vez acometida, tendía directamente a ampliarse al caso de las funciones.

En este contexto debemos corregir también una interpretación, evidentemente errónea, de SCHOLZ que, en su *Exkurs über Frege,* sostiene la opinión, apoyada en Gl. 77 n. 2, "... de que FREGE en los *Grundlagen* no interpreta todavía, como en la explicación posterior, más aguda... los conceptos como Referencias de predicados, sino que los identifica con predicados" [4]. Esta interpretación es puesta en entredicho no sólo por aserciones ya contenidas en el *Begriffsschrift* (Bs. 17 s.; WBBs 49 s.) y en los *Grundlagen* —como "Las imágenes objetivas pueden dividirse en objetos y conceptos" (Gl. 37 n)—, sino también por todo lo dicho allí sobre los conceptos. Parece que SCHOLZ se ha ceñido al lugar citado por él, que conduce al error de modo fácil, debido a que FREGE emplea la palabra "predicado" de manera totalmente inconsecuente en los *Grundlagen.* Esto es, cuando se dice: "Concepto es para mí un predicado posible de un contenido singular enjuiciable; objeto, un sujeto posible de un contenido tal" (Gl. 77 n. 2), no se designa —como SCHOLZ opina— con "predicado" y "sujeto" las partes proposicionales correspondientes,

---

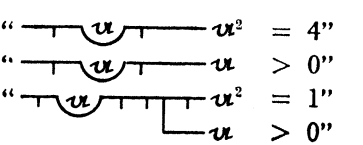
[3] BARTLETT parece que comparte este punto de vista (según su formulación en *Funktion und Gegenstand. Eine Untersuchung in der Logik von Gottlob Frege.* Phil. Diss. Munich 1961, p. 40).

[4] H. SCHOLZ y H. SCHWEITZER: *Die sogenannten Definitionem durch Abstraktion. Eine Theorie der Definitionen durch Bildung von Gleichheitsverwandtschaften. Forschungen zur Logistik und zur Grundlegung der exakten Wissenschaften,* publ. por H. SCHOLZ. Cuaderno 3. Leipzig (F. MEINER) 1935. (§ 2. *Die Cantorschen Definitionen durch Abstraktion. C. Exkurs über Frege,* 24-30). Cita de la p. 26.

sino su contenido[5]; y, por ello, puede decir FREGE en los *Grundlagen:* "Un término universal designa exactamente un concepto" (Gl. 63). Es más, el lugar citado por SCHOLZ no apoya, sino que va justo contra su interpretación. Pues, si sujeto y predicado son del mismo orden, entonces —de acuerdo con esta cita— lo son también objeto y concepto, i. e. ambos son objetivos y pertenecen a la misma esfera objetiva que el contenido enjuiciable, en el que actúan de sujeto y predicado. Pero la distinción entre Sentido y Referencia altera esta situación. El contenido enjuiciable se divide en Pensamiento y valor de verdad; "predicado" y "sujeto" son equívocos: En el sentido lógico designan partes de un Pensamiento y, por tanto, son algo que pertenece al dominio del Sentido (SuB 35); en el sentido gramatical, son partes de una proposición que tienen por Referencia un concepto o un objeto respectivamente. Objeto y concepto no se han identificado, por tanto, en los *Grundlagen* con sujeto y predicado, sino que pertenecen como "sujeto posible" y "predicado posible" respectivamente a la esfera objetiva del contenido, que más tarde se divide en dos dominios: El del Sentido y el de la Referencia.

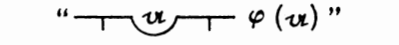
Una interpretación, como la sostenida por SCHOLZ, podría deberse tan sólo a la identificación posterior de las funciones monádicas —cuyos valores son valores veritativos— con los conceptos. Análogamente, las funciones diádicas, cuyos argumentos son objetos y cuyos valores son valores veritativos, son identificadas por FREGE con las relaciones. Parece que éstas se conectan con los conceptos de modo sencillo, pues a partir de cualquier relación se obtiene un concepto mediante "saturación parcial" con uno sólo de los dos argumentos previstos. Es digno de destacarse que este punto de vista se encuentra ya plenamente desarrollado en los *Grundlagen,* donde ciertamente no aparece la expresión "función", pero donde las relaciones —allí llamadas "conceptos relacionantes"— se caracterizan como "necesitadas de doble complementación" y se describe también la conexión con los conceptos (Gl. 82). El lugar central que concepto y relación ocupan ya en los *Grundlagen* les corresponde también en los *Grundgesetze,* donde FREGE llega incluso a decir: "Concepto y relación son las dos piedras angulares sobre las que construyo mi edificio" (Gg I 3).

Si se considera que las relaciones no sólo son posibles entre objetos, sino también entre conceptos, entonces hay que tratar de incluir también este caso en nuestro estudio mediante la consideración de expresiones (como en los ejemplos iniciales que condujeron al concepto de función) tales como:



[5] Cf. Gl 68, 77 n. 2, 80, 83, 100, con la excepción de Gl 40, 72. Apoya nuestra interpretación el hecho de que FREGE designe los conceptos como "predicados

para encontrar lo común entre ellas. Un elemento común de esta índole podremos describirlo siempre que ampliemos el concepto de función de modo tal que la "necesidad de complementación" sea característica sólo de las funciones, sin que les sea dada una categoría a los argumentos. Por consiguiente, las funciones del tipo hasta aquí considerado hay que admitirlas como argumentos (por supuesto, no de las funciones hasta ahora consideradas), y podemos ver nuestras expresiones como valores de una única función, designada por

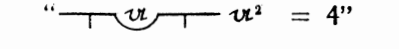


con la letra señalizadora "φ". Puesto que las tres expresiones son proposiciones existenciales, tenemos como valores de esta función, al igual que en el ejemplo anterior, valores de verdad; pero los argumentos no son ya objetos, sino funciones, a saber

$$\xi^2=4, \quad \xi>0 \quad \text{y} \quad \begin{matrix} \xi^2 & = 1 \\ \xi & > 0. \end{matrix}$$

A tales funciones, cuyos argumentos son funciones con argumentos objetuales, las llama FREGE *Funciones de segundo grado,* para distinguirlas de las funciones de primer grado hasta aquí estudiadas. Puesto que estas últimas pueden aparecer como argumentos, se distinguirá también entre objetos y funciones de primer grado como *argumentos de primero y segundo tipo* en el dominio de los argumentos posibles.

Naturalmente, la ampliación resultante se aplica también a la doctrina del concepto. Como *conceptos de segundo grado* se admiten, por ejemplo, la existencia y la univocidad que ya FREGE había distinguido en los *Grundlagen* como "conceptos de segundo orden" de los conceptos usuales de primer orden [6]. Es característico de los conceptos de segundo grado el tomar como valores, exclusivamente, valores de verdad y el ser, además, monádicos. El primero de nuestros ejemplos,



es de este tipo; materialmente se dice que hay algo, cuyo cuadrado es igual a 4, o con otras palabras: "Existe (cuando menos) una raíz cuadrada de 4". En traducciones de este tipo debe andarse con tiento, pues la expresión lingüística nos conduce aquí en una dirección falsa: Adjudica la existencia a un objeto, la raíz cuadrada de 4 (o las dos raíces cuadradas de 4), mientras que el análisis freguiano muestra que en ver-

---

posibles" también en los "Grundgesetze" (II 69) —por lo tanto, unívocamente, en el segundo periodo de su pensamiento.

[6] Esto es, al mismo tiempo, un nuevo ejemplo de que no todas las posiciones significativas del segundo período se encuentran desconectadas de los primeros escritos.

dad se dice algo de un concepto —a saber, del concepto "raíz cuadrada de 4"—, que algo cae bajo él, que no está vacío[7]. Si se sustituye la palabra "existencia" por la palabra "no-vacío" o alguna parecida (para evitar errores), no deberá admitirse entonces que haya *además* una propiedad "existencia" que corresponda a los objetos que caigan bajo un concepto. Esto se verá claramente en el caso análogo de la no-existencia; pues, si se dice que no hay ningún objeto con la propiedad F, entonces no hay ningún objeto al que pueda corresponder la no-existencia —existe sólo el concepto F mismo, al que se le adjudica la propiedad de ser "vacío", de no tener bajo sí ningún objeto. Es totalmente indiferente si esto sucede porque ningún objeto cae "accidentalmente" bajo un concepto vacío —lo que no sucede en Lógica y Aritmética— o porque el objeto coordina en sí mismo propiedades contradictorias[8].

Si se efectúa el paso de funciones de primer grado a funciones de segundo grado, no habrá ninguna razón que impida la admisión de funciones de segundo grado en los lugares argumentales de funciones de tercer grado. ¿Por qué no podrán explicarse, en general, las funciones de grado n como funciones cuyos argumentos sean funciones de grado $n-1$? Aunque la interpretación material ya plantea dificultades en las funciones de tercer grado, no sólo parece legítima formalmente, sino imprescindible, la construcción de una jerarquía infinita de funciones siguiendo la manera de proceder explicada para los primeros pasos. Puesto que, en virtud de la correspondencia entre FREGE y RUSSELL, podemos estar casi seguros de que RUSSELL ha desarrollado su noción de la Teoría simple de los Tipos —por lo demás, rechazada por FREGE—, en contacto directo con la distinción gradual freguiana de las funciones[9], será de esperar que la gradación infinita russelliana de los dominios objetuales tenga su prototipo estructural en una gradación infinita de funciones en FREGE.

[7] En los lenguajes naturales se usa, además, otro concepto de existencia. Aparece en cuestiones como "¿Ha existido realmente Odiseo?" o en aserciones como "El mostruo del Lago Ness no existe".. Aquí se trata de si un nombre propio ("Odiseo", "El monstruo del Lago Ness") designa algo. Un lenguaje científico perfecto no usa este concepto de existencia, porque en los lenguajes exactos —tal como los concibe FREGE— se prevé que cualquier nombre propio designe algo (KB 453). Los nombres propios vacíos no tienen ninguna legitimidad lógica (ibid.); en cambio, los conceptos vacíos son no sólo lícitos, sino incluso imprescindibles. Esto último fué puesto en duda por SCHROEDER: *Vorlesungen über die Algebra der Logik*, I, Leipzig 1890 (50, 69).

[8] Al mismo tiempo, se demuestra que es una pseudo-cuestión si los llamados "objetos imposibles" tienen o no una "Existencia ideal", puesto que se demuestra la falsedad del supuesto de que los objetos reales tienen una existencia "real": La existencia pertenece únicamente a los conceptos, que "no sean vacíos", i. e. caso de que caigan bajo éllos objetos; del mismo modo, la "no existencia" conviene a los conceptos vacíos. Tampoco puede resucitar esta cuestión el supuesto de que hay una propiedad —la "imposibilidad"—, que pertenece a los objetos imposibles, pues en una formulación más estricta se demuestra que "ξ es imposible" es un concepto vacío: "$\neg\hat{\iota}\neg f(\xi)$".

[9] H. D. SLUGA: *Frege und die Typentheorie. Eine historische Untersuchung.* En: Logik und Logikkalkül (Festschrift für Wilhelm Britzelmayr), Freiburg, Munich, 1964, 195-209 (206).

Por ello, debe ser sorprendente que FREGE haya renunciado a una jerarquía gradual infinita de funciones. Sólo en dos lugares de sus publicaciones FREGE ha manifestado algo en torno a ello. Uno de estos lugares se encuentra al final del artículo "Function und Begriff", donde FREGE, en el desarrollo de la Aritmética, constata un camino ascendente gradual hacia conceptos de función siempre más generales. A los pasos previos que van desde enunciados numéricos especiales a leyes numéricas generales (introducción de "variables numéricas") y luego a leyes generales sobre funciones (introducción de "variables de función") FREGE ha añadido un paso posterior mediante la introducción del concepto general de función de segundo grado, bajo el cual cualesquiera leyes válidas sobre funciones se subsumen como funciones especiales de segundo grado. Entonces FREGE continúa:

"Se podría pensar (!) que esto llevaría mucho más lejos. Pero, probablemente, este último paso no es tan rico en consecuencias como los anteriores, porque en desarrollos posteriores en lugar de las funciones de segundo grado podrían considerarse funciones de primer grado" (FuB 31).

La segunda aserción de FREGE, muy parecida a la anterior, se encuentra en los *Grundgesetze*, en aquel lugar en el que, tras la introducción de una función de tercer grado, debe sobrevenir la decisión sobre la posibilidad de seguir hacia grados más altos. También aquí FREGE se decide negativamente:

"Se podría opinar (!) que esto no es bastante, pero veremos que podemos contentarnos con esto (i. e. universalidad de las funciones de 2. grado; por consiguiente, de una única función de 3. grado), y que, incluso, sólo ocurre en una única proposición. Se podrá notar aquí que las funciones de segundo grado pueden representarse en cierto modo mediante funciones de primer grado" (Gg I 42).

Sin embargo, por el hecho de que una función de grado más alto pueda ser representada por otra de grado más bajo, la primera no queda eliminada; y puesto que una gradación infinita de funciones parece totalmente compatible con la posibilidad de la reducibilidad en general, sigue en pie la cuestión sobre los motivos de FREGE para limitarse al tercer grado.

Antes de ponernos a buscar tales motivos, deberá esclarecerse el hecho de que en el sistema de FREGE la iteración ilimitada de pasos graduales no conduciría a una estructura que abarcase *todas* las funciones. Por motivos, no del todo claros, FREGE divide en grados sólo las funciones homogéneas, i.e. aquellas cuyos argumentos son todos del mismo grado [10]. Pero una ordenación gradual restringida a funciones homogé-

[10] Se podría sospechar que hay una causa en que FREGE concibe la distinción de grados (en el análisis del concepto de existencia en § 53 de los "Grundlagen") usando como ejemplos funciones *monádicas* y en que, al principio, no toma en cuenta la distinción entre funciones homogéneas y heterogéneas. Pero es evidente el supuesto de que, simplemente, no hay ninguna necesidad de ordenar

neas implica una "jerarquía" con un dominio de aplicabilidad más limitado, por el hecho de que la mayoría de las funciones (en un sentido precisable) son heterogéneas [11], dejando aparte el hecho de que entre las funciones heterogéneas se encuentren relaciones tan importantes como la de subsunción en un concepto:

$$\text{——}\ \varphi(\xi).$$

Es curioso que la gradación freguiana de funciones se exponga la mayoría de las veces erróneamente como una ordenación del dominio total de funciones [12].

Pero, independientemente, de esta restricción puede plantearse la cuestión de por qué FREGE no ha ampliado hasta el infinito por lo menos la gradación de funciones homogéneas. SLUGA opina: "Era claro para él que la jerarquía de tipos, de aceptarla, podría conducirle a dificultades insuperables en el dominio de la matemática" (l. c. 197), sin embargo SLUGA no entra en más detalles. Es muy simple el supuesto de que la limitación de FREGE se apoyaría en un temor ante el paso al infinito. Pero este supuesto pierde verosimilitud, si se atiende al parecer de FREGE respecto de las potencias más altas cantorianas. Este parecer debe destacarse, porque FREGE ha sometido a una crítica bastante rigurosa la Teoría de los Números Irracionales de Cantor o, más exactamente, la "definición por abstracción" usada allí. Sin embargo, mientras la mayoría de matemáticos contemporáneos suyos rechazaban los alephs o, por lo menos, los observaban con desconfianza, FREGE no mostró en modo alguno intranquilidad ante ellos: Los valora en los *Grundlagen* como un progreso significativo y observa satisfecho que los medios proporcionados por él podrían aplicarse tanto a ellos como a las extensiones conceptuales y a los simples números naturales. A este respecto interesa también aquí su observación posterior sobre "el infinito actual que defiende con razón G. CANTOR" (Gg II 127).

---

las funciones heterogéneas. Entonces, ¿por qué se ha de prever este caso? FREGE, en los "Grundgesetze", ha perdido poco el tiempo en aquellas cosas que no tuvieran una relación inmediata con la construcción planeada. Incluso el nombre *di*-ádico de una función de tercer grado, introducido ya con propósitos explicatorios, es abandonado posteriormente, "porque no será necesario" (Gg I 48).

[11] Ya en las funciones diádicas, el grado $n+1$ contendría n veces tantas funciones heterogéneas como homogéneas.

[12] CARNAP escribe: "Ha de destacarse ahora que el mismo FREGE ya ha anticipado una clasificación similar de todas (!) las funciones proposicionales en grados y tipos, que se ordena según el tipo de argumentos" (*Log. Synt.* 99). SCHWEITZER (op. cit. 52) caracteriza la "Lógica freguiana" por la presencia de una Teoría simple de Tipos con objetos, funciones de primer grado, funciones de segundo grado etc. (!). SLUGA parece que piensa de modo semejante, cuando dice:" La teoría de FREGE, examinada minuciosamente, conduce al supuesto de una jerarquía infinita de tipos, por lo cual las funciones del tipo n tiene, cuando menos un objeto del tipo n-1 como argumento y nunca un argumento del tipo superior" (l. c. 197). Mas en FREGE tampoco se prevé un argumento de tipo inferior, de modo que, en este sentido, tampoco sería universal su teoría de los tipos, "examinada minuciosamente".

Evidentemente, en funciones de infinitos grados no es seguro de antemano que las leyes, válidas para ellas, hayan de ser tan simples como la del paso de un grado al siguiente. Puesto que ya en el caso de la diadicidad la clasificación de todas las funciones posibles de "fundamentos distintos", según FREGE, conduce a un resultado algo complicado, se podría suponer que FREGE ha temido el caos que significaría la admisión de infinitos grados funcionales[13]. Realmente, hay para esto tan pocos puntos de apoyo como para el hecho de que haya considerado absurda la admisión de infinitas entidades primitivas o para haber seguido simplemente el "principio de economía científica" (Gg I 26 a), al que ha recurrido numerosas veces en otros contextos.

Aquí tenemos la sospecha de que de las razones que han contribuido a la decisión de FREGE en el punto en cuestión ha sido decisiva la idea de construcción y el tipo de justificación de esta construcción que se intenta. Para entender ambas concepciones fundamentales, apenas tomadas en cuenta en la literatura secundaria, debemos volver una vez más a la conceptografía, que ha sido ampliada en los *Grundgesetze.* Además de un signo que permite formar a partir del nombre de una función el nombre de su curso de valores (véase *infra*), se agrega un signo que sirve para la formación de descripciones y que, por ello, cumple una tarea que en los lenguajes naturales corresponde al artículo determinado. Si se prescinde de estas adiciones y de la sustitución del signo de igualdad de contenido por el signo de igualdad ordinario, entonces apenas se ha alterado la "conceptografía" y el "algoritmo". Pero totalmente distinta es ahora la interpretación dada a los signos. Mientras que FREGE en el *Begriffsschrift* había distinguido del reconocimiento de la verdad de una proposición aseverativa su contenido como un todo, ahora divide este contenido en dos componentes: el Pensamiento, expresado por la proposición, y el valor de verdad de la proposición.

La importancia del concepto de valor de verdad no es exagerada en los *Grundgesetze,* pues lo Verdadero y lo Falso son las Referencias de las proposiciones y las proposiciones aritméticas son el objetivo al que tiende la totalidad de la construcción logicista. Su posición privilegiada se muestra también en que conceptos y relaciones son, precisamente, funciones cuyo curso de valores sólo consta de ambos valores veritativos. En la conceptografía nos los encontramos como los primeros valores de funciones, a saber como valores de las funciones $—\xi$, $\top\xi$ y $\xi=\zeta$.

Por supuesto, en cuanto a los argumentos de estas funciones no *hay* que limitarse a ambos valores de verdad, sino que de antemano deben tomarse en cuenta todos los argumentos pensables. Para no tener que definir adicionalmente funciones que se expliciten para argumentos de un dominio de objetos determinado en cualquier ampliación del mismo por la consideración de nuevos objetos, FREGE explica todas las funciones

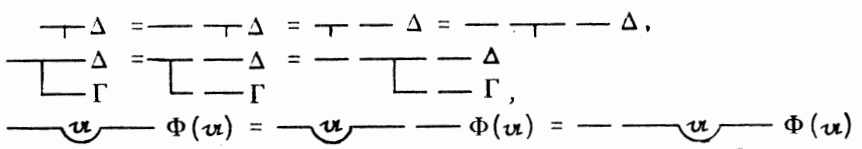
[13] En cualquier caso, FREGE rechaza de este modo la complicación que debería derivarse del establecimiento de una categoría de "objetos impropios". Cf. Gg II 254 s.

de modo tal que se establezca un valor funcional no sólo para los objetos ya considerados, sino también para todos los objetos que podrían ocupar nuestra atención alguna vez. Puesto que, en este sentido, no puede hablarse de limitación alguna, deben tenerse en cuenta todos los objetos y dejar abierta la posibilidad de "otros argumentos" en cualquier definición de una función. De este modo (y sólo así) puede realizarse el principio freguiano de que cualquier conexión de signos "$\Phi(\Delta)$" tenga siempre una Referencia, cualquiera que sea la amplitud del dominio de objetos considerados que se pueda elegir.

En primer lugar, una función $-\xi$ es explicada mediante la aserción

(1) $-\Delta$ debe ser { lo Verdadero, si Δ es lo Verdadero, / lo Falso, si Δ no es lo Verdadero.

El signo funcional introducido es equiparado al anterior trazo de contenido y toma su lugar en el "algoritmo" de la conceptografía. El significado del hecho de que el trazo de contenido aparezca ahora como signo funcional, ha sido minusvalorizado en general, a pesar del énfasis que FREGE pone en él[14]. Su importancia no sólo radica en la precisión que otorga a la explicación de las conexiones de signos "$-\Delta$" y "$-\Phi(\ldots)$", sino también en la posibilidad que brinda de pasar inmediatamente de objetos Δ a valores de verdad $-\Delta$ y de funciones $\Phi(\xi)$ y $\Psi(\xi, \zeta)$. a conceptos $-\Phi(\xi)$ y relaciones $-\Psi(\xi, \zeta)$ respectivamente. Asimismo las relaciones,



que aparecen en la "conceptografía" como simple peculiaridad del sistema simbólico, serán inteligibles y demostrables a partir de las explicaciones de las funciones mismas. Esto se sigue de (1) juntamente con las tres primeras de las explicaciones siguientes:

(2) El valor de $\vdash\xi$ es lo Falso para cualquier argumento para el que el valor de $-\xi$ sea lo Verdadero; para todos los restantes argumentos es lo Verdadero.

(3) El valor de $\begin{matrix}\xi\\ \zeta\end{matrix}$ es lo Falso, si se toma como argumento-ζ lo Verdadero y como argumento-ξ cualquier objeto que no sea lo Verdadero; en todos los demás casos es lo Verdadero[15].

[14] Parece que únicamente BIERICH ha reconocido y hablado de la importancia de este nuevo sentido. Cf. op. cit., Capítulo 2, Parte VI.

[15] Esta introducción modificada de la condicionalidad y de la negación ha sido interpretada de modo totalmente erróneo por BIERICH (op. cit. Capítulo 2. Parte IV, en particular 30 ss.). Según esta interpretación, las funciones de negación y de

(4) El valor de $\xi=\zeta$ es lo Verdadero, si el argumento-ξ es el mismo que el argumento-ζ; en caso contrario es lo Falso.

(5) El valor de $\neg\breve{\mathfrak{a}}\,\varphi(\mathfrak{a})$ es lo Verdadero para cualquier función (de primer grado) elegida como argumento, cuyo valor sea lo Verdadero para cualquier argumento; para cualquier otro argumento es lo Falso.

(6) $\neg\breve{f}\,\Omega_\beta(f(\beta))$ es lo Verdadero, si el valor de la función de segundo grado $\Omega_\beta(\varphi(\beta))$ es lo Verdadero para cualquier argumento que le convenga; en caso contrario es lo Falso.

Así pueden introducirse de manera simple funciones nuevas mediante la explicación de signos funcionales, sin ampliar el dominio de valores funcionales, que seguirá estando limitado en cualquier caso a ambos va-

---

condición serían en el "Begriffsschrift" funciones de primer grado de la forma

$$\lambda\, x[K(x)] \qquad \text{resp.} \qquad \lambda\, x\, \lambda\, y[H(x, y)],$$

mientras que en los escritos del segundo periodo serían funciones de segundo grado de la forma

$$\lambda\, x[J(g(x))] \qquad \text{resp.} \qquad \lambda\, x\, \lambda\, y[G(g(x), g(y))],$$

por lo que

$$\lambda\, x[g(x)] \rightleftharpoons \begin{cases} V \text{ si } x = V \\ F \text{ si } x \neq V \end{cases}$$

$$J(g(x)) \rightleftharpoons \begin{cases} V \text{ si } x \neq V \\ F \text{ si } x = V \end{cases}$$

$$G(g(x), g(y)) \rightleftharpoons \begin{cases} F \text{ si } x = V \text{ e } y \neq V \\ V \text{ en caso contrario} \end{cases}$$

(según BIERICH).

Mientras que la primera aserción puede justificarse, al menos como interpretación posterior (FREGE, como hemos visto, no introduce explícitamente en el "Begriffsschrift" como funciones la condicionalidad y la negación), debe rechazarse enérgicamente la segunda aserción. La condicionalidad y la negación, en los "Grundgesetze", no son funciones de segundo grado, sino funciones compuestas de primer grado. Esto es tan evidente que se tiende a explicarlo diciendo que BIERICH usa el concepto de grado de modo distinto a como FREGE, i. e. para designar el grado de complejidad de una función, tal como hace en las págs. 30 y 35 de su trabajo, donde considera que los argumentos de una función de contenido son "siempre de un nivel o grado más sencillo" y "compuestos por un grado menor" que los valores. Pero, puesto que, en el último punto citado, una nota se refiere inmediatamente a la distinción de FREGE de funciones de primero, segundo y tercer grado, ha de concluirse que B)1x)4: ha confundido efectivamente grado y grado de complejidad de una función —si bien la misma notación— λ de CHURCH, elegida por BIERICH, había debido clarificar esta situación. Por lo tanto, parece conveniente insistir en la distinción entre una función freguiana de segundo grado y una función compuesta de primer grado (para la que se sigue usando, en la matemática escolar, la designación errónea "función de una función"). Mientras que una función de segundo grado tiene como argumentos funciones de primer grado, se obtienen los valores de una función compuesta (de primer grado), tomando, como argumentos de una función "externa", objetos (!), que sean dados como valores de una función "interna" (sencilla o compuesta). Ejemplo: para encontrar el valor de una función compuesta doble $\cos^2\xi$ para el argumento π, se toma el valor de la función interna $\cos\xi$ para el argumento π —por tanto 1—, como argumento de la función externa ξ^2. El valor buscado es, por consiguiente, 1.

lores veritativos. Con todo, está claro que con estos medios no puede construirse aritmética alguna, si se quiere introducir —como hace FREGE— las cantidades y, en general, todos los números como objetos. El punto de vista de FREGE, que se expresa en la aserción: "Como problema primigenio en Aritmética se puede considerar la cuestión: ¿Cómo concebimos los objetos lógicos, en particular los números? ¿Por qué motivo estamos autorizados a reconocer los números como objetos?" (Gg II 265), puede sostenerse solamente si el dominio de objetos considerado es ampliado más allá de lo Verdadero y de lo Falso, por lo menos, hasta incluir los números. Si se definen éstos como extensiones de conceptos determinados, entonces debe ser posible hacer enunciados sobre extensiones conceptuales. Aun cuando bastaría con proporcionar signos libres de lugares vacíos cuyas Referencias fuesen extensiones conceptuales, FREGE hará la introducción de un modo algo más general. Cómo se efectúa esta introducción y qué consecuencias (en parte, molestas) se siguen de ella, vamos a discutirlo ahora más detalladamente.

1.4. CURSOS DE VALORES Y PROBLEMA DE AMPLIACION

Según la interpretación usual en Lógica, a dos conceptos se les adjudica la misma extensión si, y sólo si, cualquier objeto que caiga bajo uno de los conceptos cae también bajo el otro. Si —como hacíamos arriba— se interpretan los conceptos como funciones especiales, entonces dos conceptos tienen la misma extensión si, y sólo si, toman el mismo valor para cada argumento. Esto se puede generalizar de manera sencilla. Considérese una serie de funciones (por ahora arbitrarias) $\Phi(\xi)$, $\Psi(\xi)$, ..., que para el mismo argumento tomen el mismo valor, de modo que para cualquier arbitrario Δ valga

$$\Phi(\Delta)=\Psi(\Delta)=\ldots$$

Este proceder puede explicarse diciendo que todas estas funciones tendrían el "mismo curso de valores"; como en el caso de las funciones matemáticas con un dominio de argumentos ordenado, el curso de valores será intuitivamente comprensible en forma de una curva[1]. De acuerdo con ello, después de haber hablado ocasionalmente de los "cursos de valores que se introducen más abajo", FREGE considera en el § 3 de los *Grundgesetze* que las palabras

"la función $\Phi(\xi)$ tiene el mismo curso de valores que la función $\Psi(\xi)$".

tienen el mismo significado que las palabras

"las funciones $\Phi(\xi)$ y $\Psi(\xi)$ tienen para el mismo argumento siempre el mismo valor" (Gg I 7)[2].

La circunstancia de que cualquier introducción en la ecuación "$\Phi(x)=\Psi(x)$" proporcione un nombre de lo Verdadero, es expresada en § 8 mediante "$\text{—}\smile\mathfrak{a}\text{—}\,\Phi(\mathfrak{a})=\Psi(\mathfrak{a})$", usando los cuantificadores ya conocidos por nosotros. El hecho de que se pueda decir que la función $\Phi(\xi)$

[1] Véase Gg I 54 (§ 36) y FuB 8 ss., en particular pág. 10, donde FREGE se refiere correctamente a que la expresión "Función" designa en Matemática ordinariamente un curso de valores, no una función en el sentido freguiano (es lo "lógicamente anterior").

[2] En el desarrollo sistemático FREGE parte inmediatamente de la igualdad de cursos de valores de funciones, para mostrar sólo luego en un ejemplo que la igualdad de cursos de valores es equivalente a la coincidencia de dos extensiones conceptuales, si $\Phi(\xi)$ y $\Psi(\xi)$ toman siempre, como valores, valores veritativos. Sobre estas bases (!) se alzará la conveniencia de "denominar *concepto* a una función, cuyo valor sea siempre un valor veritativo" (Gg I 8).

tiene el mismo curso de valores que la función $\Psi(\xi)$, lo considera FREGE como infundamentable:

"Podemos convertir y cambiar la universalidad de una igualdad en una igualdad de cursos de valores y viceversa. Esta posibilidad debe considerarse como una ley lógica de la que, por lo demás, se ha hecho uso tácito siempre que se ha hablado de extensiones conceptuales" (Gg I 14, y de modo parecido en FuB 10).

De la exposición de FREGE se desprende claramente que la trasposición de la equivalencia general de funciones en igualdad de cursos de valores no alterará el Sentido del enunciado. Una prueba a este respecto la proporciona el comentario al ejemplo, contenido en "Function und Begriff", sobre la igualdad de cursos de valores, según el cual el curso de valores de la función $\xi^2 - 4\xi$ es igual al curso de valores de la función $\xi(\xi - 4)$:

"'$x^2 - 4x = x(x-4)$' expresa ciertamente el mismo Sentido —si entendemos este hecho como antes—, pero de modo distinto. Presenta el Sentido como la universalidad de una ecuación, mientras que la nueva expresión introducida es simplemente una ecuación cuyo segundo miembro, así como el primero tiene una Referencia completa en sí misma" (FuB 10-11; Gg II 147 y ASB).

En esto, FREGE es, evidentemente, de la opinión de que la legitimidad de la trasposición resulta directamente del derecho a hablar no sólo de una igualdad de cursos de valores, sino también, aisladamente, del "curso de valores...". Pues, tal como él concluye, en el enunciado sobre una igualdad de cursos de valores reconocemos

"algo común a ambas funciones, y lo llamamos tanto el curso de valores de la primera función como el curso de valores de la segunda función. El hecho de que tengamos derecho a reconocer lo común y el que, de acuerdo con ello (!), podamos trasponer la universalidad de una igualdad en una igualdad (identidad), debemos tomarlo como una ley lógica básica" (Gg 147).

Por este motivo será también inteligible por qué FREGE no considera necesaria una fundamentación específica, cuando en § 8 (después de haber explicado como infundamentable la trasposición misma), establece como algo comprensible en sí mismo el que: "Podemos establecer un signo simple para un curso de valores" (Gg I 14). Aquí la simplicidad indica que al signo, y no sólo a las conexiones de las que forme parte, le corresponde una Referencia; por el contrario, el signo para el curso de valores no es simple en el sentido del "principio de simplicidad" freguiano (Gg II 79 s.), sino que es una *conexión* de signos y como tal es considerado por FREGE también en otros lugares (Gg II 148). El curso de valores de una función monádica $\Phi(\xi)$ de primer grado[3] es designado mediante "$\grave{\varepsilon}\Phi(\epsilon)$", expresión formada por introducción del nombre funcional dado "$\Phi(\xi)$" en el lugar vacío del nombre funcional "$\grave{\varepsilon}\varphi(\epsilon)$". El

[3] FREGE introduce los cursos de valores sólo para funciones de primer grado.

signo resultante del valor funcional se diferencia del nombre funcional "$\Phi(\xi)$" sólo en que ahora el lugar vacío aparece ligado por un operador ($\grave{\varepsilon}$); el nuevo signo es, en cuanto expresión libre de lugares vacíos, un nombre de objeto, que puede encontrarse a ambos lados del signo de igualdad, por ejemplo, en la expresión "$\grave{\varepsilon}\Phi(\varepsilon)=\grave{\alpha}\Psi(\alpha)$", debería tener el mismo Sentido y la misma Referencia que la expresión

"$\breve{\mathfrak{u}}\,\Phi(\mathfrak{u}) = \Psi(\mathfrak{u})$"

Reglas apropiadas procuran que nombres funcionales y nombres de cursos de valores se correspondan entre sí por parejas y que pueda encontrarse inmediatamente uno si el otro es dado.

Pero la consideración de la posibilidad de introducir nombres de cursos de valores, como otros nombres de objeto, en los lugares vacíos de todos los nombres de funciones de primer grado, trae a la luz el hecho de que sea necesario hacer todavía algunas observaciones decisivas. En las explicaciones de funciones de primer grado, citadas hasta aquí ($\xi=\zeta$, $-\xi$ y $\vdash\xi$), sólo se ha hablado de argumentos y de valores, pero nunca de nombres de los mismos. Esto no ha sido casual en cuanto que sólo de este modo podría cumplirse el principio de completud, según el cual como argumentos posibles no sólo hay que admitir los dos valores de verdad que forman el dominio de valores de estas funciones, sino todos los objetos. Puesto que no se conocen más objetos que lo Verdadero y lo Falso, las funciones deben ser explicadas para lo Verdadero, para lo Falso y para "otros argumentos", sin aludir a nombres de argumentos, ya que, en general, no puede decirse nada apriori sobre los posibles nombres de objetos. Aquí ha de subrayarse que cualquier función proporciona para cualquier signo argumental dado un nuevo nombre de un objeto a partir del dominio de valores, pero que todos los nombres primitivos son nombres funcionales y que, por ello, no conocemos en principio un único nombre de objeto: Sólo en virtud de las explicaciones de $\xi=\zeta$ y de la función de segundo grado $\breve{\mathfrak{u}}\,\varphi(\mathfrak{u})$ se puede construir en "$\breve{\mathfrak{u}}\,\mathfrak{u}=\mathfrak{u}$" un nombre para lo Verdadero y, a partir de ello, con ayuda de la explicación de $\vdash\xi$, un nombre para lo Falso.

Era decisivo aquí el que la función $\breve{\mathfrak{u}}\,\varphi(\mathfrak{u})$ ya estuviera explicada. Otra es la situación en el caso de los nombres de cursos de valores. Aunque más tarde sea introducida entre las funciones primitivas la función $\grave{\varepsilon}\varphi(\varepsilon)$, nunca se encontrará en los *Grundgesetze* una explicación que diga algo más que el hecho de ser exactamente aquella función cuyo valor para una función monádica de primer grado, elegida como argumento, es justamente su curso de valores. Esto tiene por consecuencia el hecho de que podamos producir, con ayuda de esta función, los nombre de cursos de valores "$\grave{\varepsilon}(\varepsilon=\varepsilon)$", "$\grave{\varepsilon}(-\varepsilon)$", "$\grave{\varepsilon}(\vdash\varepsilon)$" y así sucesivamente, pero también el hecho de que las Referencias de todos estos nombres nos sigan siendo desconocidas.

Pero éste es sólo un ejemplo entre muchos; pues, en general, hay

que establecer —y con esto comienza el difícil § 10 de los *Grundgesetze*— que no es suficiente en modo alguno el conocimiento de los cursos de valores conseguido mediante la identificación de "$\grave{\varepsilon}\Phi(\varepsilon)=\grave{\alpha}\Psi(\alpha)$" con

$$\text{“}\overset{\smile}{\text{—}\mathfrak{a}\text{—}}\Phi(\mathfrak{a}) = \Psi(\mathfrak{a})\text{”}$$

Ciertamente la fórmula de trasposición nos proporciona un medio para "reconocer" cursos de valores, siempre que se nos den mediante nombres de cursos de valores. Pero hasta ahora ni podemos decidir si un nombre objetual de *otra* forma designa un curso de valores ni si un curso de valores tiene una propiedad dada. Lo primero —en la limitación a los dos valores veritativos impuesta hasta ahora— depende de la decisión de si uno (o ambos) de los dos valores veritativos es un curso de valores; lo segundo requiere la decidibilidad de la cuestión de si una expresión dada "$\Psi(\grave{\varepsilon}\Phi(\varepsilon))$" con un signo de predicado "$\Psi(\xi)$" designa lo Verdadero o lo Falso. Esta indeterminación implica que el tránsito de la equivalencia general de funciones a igualdad de ciertos objetos abstractos no puede establecerse unívocamente, pues

"si $X(\xi)$ es una función que nunca toma el mismo valor funcional para argumentos diferentes, entonces la misma característica de reconocimiento vale tanto para los objetos, cuyos nombres tienen la forma '$X(\grave{\varepsilon}\Phi(\varepsilon))$', como para los objetos cuyos signos tienen la forma '$\grave{\varepsilon}\Phi(\varepsilon)$'" (G I 16).

Así, pues, la condición para $X(\xi)$ enuncia que el mismo valor funcional sólo es posible con el mismo argumento, de modo que se puede concluir "$\grave{\varepsilon}\Phi(\varepsilon)=\grave{\alpha}\Psi(\alpha)$" de "$X(\grave{\varepsilon}\Phi(\varepsilon))=X(\grave{\alpha}\Psi(\alpha))$", de donde (puesto que la conclusión inversa es trivial), se sigue la igualdad de valores de ambos enunciados [4].

Pero esta indeterminación se puede evitar por "el hecho de determinar en la introducción de cada función qué valores toma para cursos de valores como argumentos, lo mismo que para todos los restantes argumentos" (Gg I 16). Realmente esta formulación necesita un comentario. Teniendo en cuenta el principio de la completud de FREGE, podemos estar seguros de que todas las funciones explicadas tienen también un valor para cursos de valores. Lo que ahora se plantea es la determinación real de este valor, que falta todavía para las funciones que ya nos son conocidas $\xi=\zeta$, $-\xi$ y $\top\xi$, porque no sabemos si el argumento $\grave{\varepsilon}\Phi(\varepsilon)$ pertenece a "lo Verdadero", a "lo Falso" o a "otros objetos". De todos modos podemos esperar que no todos los cursos de valores sean idénticos a lo Verdadero o a lo Falso, puesto que la introducción de cursos de valores debía servir, precisamente, para comprender nuevos objetos (a saber, los números). Pero, por otra parte, tampoco podemos

[4] FREGE limita la especificación, de que los cursos de valores estén indeterminados hasta aquí, mediante la observación: "por lo menos cuando haya una función $X(\xi)$ tal que su valor, para un curso de valores como argumento, no siempre sea igual a éste mismo" (Gg I 16). Naturalmente: mediante $X(\grave{\varepsilon}\Phi(\varepsilon))=\grave{\varepsilon}\Phi(\varepsilon)$ sería ya eliminada la indeterminación.

excluir que ciertos cursos de valores sean idénticos efectivamente a lo Verdadero o a lo Falso.

La exigencia de que, en cualquier explicación sobre funciones, los valores funcionales sean *determinables* también para cursos de valores, hay que satisfacerla todavía en el caso de las funciones $\xi=\zeta$, $-\xi$ y $\vdash\xi$. Este hecho se simplifica en cuanto que el valor de $\vdash\xi$ es el mismo que el de $\vdash-\xi$ y podemos sustituir un nombre de curso de valores "$\grave{\varepsilon}\Phi(\varepsilon)$" por el nombre "$-\grave{\varepsilon}\Phi(\varepsilon)$", tan pronto como su valor sea dado. Pero la función $-\xi$, necesaria a este respecto, tiene para todo argumento el mismo valor que $\xi=(\xi=\xi)$. Por consiguiente, sólo hemos de determinar para $\xi=\zeta$ qué valores toma esta función cuando su argumento es un curso de valores. Sean o no sean ambos valores de verdad cursos de valores, los valores funcionales no sufrirán alteración alguna, y lo mismo valdrá para los casos en los que sólo uno de ellos sea un curso de valores. A saber, si el valor veritativo Δ es un curso de valores, por ejemplo $\grave{\varepsilon}\Phi_{\Delta}(\varepsilon)$, entonces el valor de $\Delta=\grave{\alpha}\Psi(\alpha)$ es el mismo que el de $\grave{\varepsilon}\Phi_{\Delta}(\varepsilon)=\grave{\alpha}\Psi(\alpha)$, y de ahí que pueda ser determinado mediante la fórmula de trasposición. Pero, si el valor veritativo Δ no es un curso de valores, entonces "$\Delta=\grave{\alpha}\Psi(\alpha)$" refiere lo Falso, porque, en caso contrario, debería designar lo Verdadero y, por consiguiente, debería aseverar materialmente que Δ es igual a $\grave{\alpha}\Psi(\alpha)$, contradiciendo, por tanto, el supuesto de que sea igual a un curso de valores. No puede decidirse, a partir de la estipulación de que "$\grave{\varepsilon}\Phi(\varepsilon)=\grave{\alpha}\Psi(\alpha)$" tiene la misma Referencia que "$\overset{\frown}{\mathfrak{a}}\Phi(\mathfrak{a})=\Psi(\mathfrak{a})$" cuál de estos casos posibles se cumple realmente. Las imágenes materiales de extensiones conceptuales sugerirían la identificación del curso de valores de cualquier concepto, bajo el que cayera lo Verdadero y sólo lo Verdadero, con lo Verdadero, y hacer una estipulación semejante también para lo Falso. ¿Pero puede aceptarse esta estipulación sin contradecir la ya establecida sobre la homogeneidad de "$\grave{\varepsilon}\Phi(\varepsilon)=\grave{\alpha}\Psi(\alpha)$" y "$\overset{\frown}{\mathfrak{a}}\Phi(\mathfrak{a})=\Psi(\mathfrak{a})$" ?

El que esto sea posible lo demuestra un ingenioso razonamiento freguiano. La consideración de la función $X(\xi)$ había clarificado que se pudiera considerar el que una ecuación "$\tilde{\eta}\Phi(\eta)=\tilde{\alpha}\Psi(\alpha)$" tuviera la misma Referencia que "$\overset{\frown}{\mathfrak{a}}\Phi(\mathfrak{a})=\Psi(\mathfrak{a})$" sin poder concluir a partir de ello la igualdad entre $\grave{\varepsilon}\Phi(\varepsilon)$ y $\tilde{\eta}\Phi(\eta)$. FREGE demuestra entonces cómo se puede construir una función tal $X(\xi)$, usando dos funciones $\Lambda(\xi)$ y $M(\xi)$, de modo que $X(\xi)$ tome como valor lo Verdadero o lo Falso para los objetos $\tilde{\eta}\Lambda(\eta)$ y $\tilde{\eta}M(\eta)$ respectivamente, permaneciendo indeterminadas las mismas $\Lambda(\xi)$ y $M(\xi)$ excepto en la condición de tomar diferentes valores para un argumento, cuando menos. Es cierto que obtenemos entonces una categoría de objetos con nombres de la forma "$X(\tilde{\eta}\Phi(\eta))$", reconocidos por el mismo medio que sirve para el reconocimiento de los cursos de valores. Pero ahora sabemos además que "$X(\tilde{\eta}\Lambda(\eta))$" refiere lo Verdadero y "$X(\tilde{\eta}M(\eta))$" lo Falso. Con otras palabras: Podemos determinar "que un curso cualquiera de valores es lo

Verdadero y otro lo Falso" (Gg I 17), al disponer apropiadamente de $\Lambda(\xi)$ y $M(\xi)$ sin contravenir la ecuación entre "$\dot{\varepsilon}\Phi(\varepsilon)=\dot{\alpha}\Psi(\alpha)$" y

$$\text{“}-\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!-\Phi(\mathfrak{a}) = \Psi(\mathfrak{a})\text{”}.$$

FREGE determina que $\dot{\varepsilon}(-\varepsilon)$ debe ser lo Verdadero y $\dot{\varepsilon}(\varepsilon = (\top\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!-\mathfrak{a}=\mathfrak{a})$ lo Falso. Las funciones correspondientes $-\xi$ y $\xi = (\top\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!-\mathfrak{a}=\mathfrak{a})$ son, evidentemente, conceptos, puesto que $-\xi$ tiene como valor lo Verdadero si, y sólo si, el argumento es lo Verdadero, y $\xi = (\top\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!-\mathfrak{a}=\mathfrak{a})$ tiene como valor lo Verdadero si, y sólo si, el argumento es lo Falso. Con esto queda establecido "que la extensión de un concepto, bajo el que sólo caiga lo Verdadero, debe ser lo Verdadero y que la extensión de un concepto, bajo el que sólo caiga lo Falso, debe ser lo Falso" (Gg II 263 a). FREGE dispone, por tanto, de las funciones $\Lambda(\xi)$ y $M(\xi)$ de modo tal que la concepción de los cursos de valores —determinada por este medio más minuciosamente—, cuando menos en lo que atañe a los objetos designados como valores de verdad, está plenamente de acuerdo con las imágenes materiales de extensiones conceptuales.

De hecho estas estipulaciones de FREGE son intuitivamente tan satisfactorias que se intentará generalizarlas hasta el extremo de "que cualquier objeto sea interpretado como curso de valores; así pues, como extensión de un concepto, bajo el cual caiga aquél como único objeto" (Gg I 18 n). Pero si se intenta esto, se demuestra inmediatamente que la ecuación de Δ con $\dot{\varepsilon}(\Delta=\varepsilon)$ sólo es posible para objetos que nos sean dados independientemente de cursos de valores, y no para aquellos que sean dados como cursos de valores, i.e. mediante un nombre de la forma de un nombre de curso de valores. Así, pues, nuestra generalización tendría que expresarse en este caso mediante

$$\text{“}\dot{\varepsilon}(\dot{\alpha}\Psi(\alpha)=\varepsilon)=\dot{\alpha}\Psi(\alpha)\text{”},$$

lo que, teniendo en cuenta la homogeneidad con

$$\text{“}-\!\overset{\mathfrak{a}}{\smile}\!-(\dot{\alpha}\Psi(\alpha) = \mathfrak{a}) = \Psi(\mathfrak{a})\text{”}$$

refiere lo Verdadero sólo si $\Psi(\xi)$ es un concepto, bajo el cual cae única y exclusivamente el objeto $\dot{\alpha}\Psi(\alpha)$. Concluye FREGE: "Puesto que, entonces, no es necesario esto, no puede mantenerse la universalidad de nuestra estipulación" (Gg I 18 n). Este resultado negativo no se puede eludir, por ejemplo, mediante la decisión de limitarse a aquellos objetos que *no* nos sean dados como cursos de valores "porque la manera de ser dado un objeto no puede considerarse una propiedad suya inalterable, en cuanto que el mismo objeto puede darse de diferentes maneras" (Gg I 18 n; cf. Gl 78 § 67).

---

[5] Esta abertura hacia una determinación apunta, al mismo tiempo, a un límite de la adecuación del procedimiento de abstracción para la producción de objetos abstractos, medido en la determinabilidad material, que quiere reparar el procedimiento de abstracción.

Si se hubiera podido llevar a la práctica la ecuación de "$\grave{\varepsilon}(\Delta=\varepsilon)$" con "$\Delta$", entonces para cualquier concepto $\Phi(\xi)$, bajo el cual cayera el objeto Δ y sólo él, hubiera sido "$\grave{\varepsilon}\Phi(\varepsilon)$" el nombre de este objeto. En la posibilidad de derivar nombres de cursos de valores a partir de nombres funcionales hubiéramos podido encontrar, por tanto, un equivalente conceptográfico del artículo determinado de los lenguajes naturales. Con todo, también ahora puede encontrarse un equivalente tal. FREGE explica a este respecto una nueva función $\backslash\xi$ mediante las estipulaciones siguientes:

(1) Si un objeto Δ conviene al argumento, de modo tal que $\grave{\varepsilon}(\Delta=\varepsilon)$ es idéntico al argumento, entonces Δ debe ser el valor funcional.

(2) Si no hay un objeto Δ tal, entonces el valor funcional ha de ser el argumento mismo.

Según ello, se puede sustituir la ecuación insostenible

$$\text{“}\backslash\grave{\varepsilon}(\Delta=\varepsilon)=\Delta\text{”}$$

por la ecuación demostrable "$\backslash\grave{\varepsilon}(\Delta=\varepsilon)=\Delta$". Si bajo un concepto $\Phi(\xi)$ cae entonces únicamente un objeto, "$\backslash\grave{\varepsilon}\Phi(\varepsilon)$" refiere exactamente este objeto, mientras que en todos los casos restantes "$\backslash\grave{\varepsilon}\Phi(\varepsilon)$" refiere lo mismo que "$\grave{\varepsilon}\Phi(\varepsilon)$". Podemos, asimismo, formar con ayuda de la función $\backslash\xi$ descripciones, de modo parecido a como hoy se hace con ayuda de los llamados Operadores-iota. Ciertamente, algunos lógicos contemporáneos eligen otras explicaciones para el caso en que ninguno o más de un objeto caiga bajo el concepto al que se aplica la función descriptora. Ya FREGE indicó a este respecto otra posibilidad, que ha desarrollado CARNAP (MaN, op. cit., § 8). Con todo, lo más importante es que el operador descriptor conceptográfico difiere del artículo determinado de los lenguajes naturales. Pues, caso de que bajo un concepto no caiga exactamente un objeto, la expresión descriptora correspondiente de los lenguajes ordinarios es, para FREGE, una expresión sin Referencia (véase abajo, Capítulo 2.2). Su equivalente conceptográfico ha de tener, por el contrario, una Referencia en virtud del principio de completud; en la explicación acabada de dar de $\backslash\xi$, se refiere, de acuerdo con el caso 2, la extensión del concepto. Este hecho se ha olvidado algunas veces [6].

---

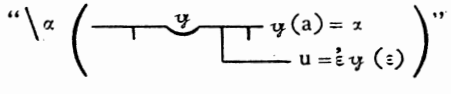
[6] Por ejemplo, en R. A. ARMS: *The Notion of Number and the Notion of Class*. Filadelfia 1917 (Phil. Diss., Universidad de Pennsylvania). En particular, II c § 3: "Frege's Theory of Ranges": 'The' *a* where *a* is a concept with more than one particular under it indicates the range of *a*. 'The horse is an intelligent animal' gives information about the range of the concept horse. 'The present King of France' denotes the range of $\grave{\varepsilon}(\neg\varepsilon=\varepsilon)$ or falsehood" (op. cit. 41).

Además de lo dicho arriba, hay que observar que, hasta ahora, no se ha podido decidir si la expresión "El *a*" designa, en el sistema de FREGE, lo mismo realmente que "El concepto *a*". Más abajo ofreceremos razones contra este supuesto. Hay que observar además que el curso de valores $\grave{\varepsilon}(\neg\varepsilon=\varepsilon)$, citado por ARMS, no es, según las especificaciones de FREGE, lo Falso, sino la extensión de un con-

El resultado de que —admitiendo las estipulaciones freguianas— no se pueda identificar un objeto con la extensión de un concepto bajo el que caiga aquél como único objeto, hará dudosa la adecuación de estas estipulaciones. Parece que ésta ha sido también la reacción de FREGE ante el descubrimiento russelliano de la conocida antinomia, puesto que confesó: "que es necesario rectificar la interpretación de las palabras 'extensión de un concepto', dada hasta hoy" (Gg II 256 a). Nos parece que es necesario hacer algunas reflexiones sobre esta misma opinión, en cuanto que es muy dudoso que se pueda presuponer una interpretación intuitiva de las extensiones conceptuales, que tenga valor. Si tiene sentido plantearse esta duda, entonces se habrá demostrado no la necesidad de rectificar tal interpretación, sino el intento de precisión freguiano, del que todavía no se ha asegurado que sea el único posible. Nuestro parecer es que sería una empresa provechosa llevar a la práctica de nuevo una precisión tal, cosa que hasta hoy no se ha hecho. El ejemplo establecido por el intento de FREGE es, ciertamente, sublime. Se aprecia este hecho al comparar esta concepción con una interpretación de la extensión conceptual, que FREGE ha atacado de tal modo que apenas hay discrepancias hoy sobre su inadecuación. Según esta interpretación, la extensión de un concepto está formada por los objetos mismos que caen bajo el concepto. Naturalmente, esta posición es contraria a la interpretación de FREGE de que los cursos de valores son objetos abstractos, "lógicos", y que, por tanto, una extensión conceptual no puede coincidir con la totalidad de los objetos que caigan bajo el concepto correspondiente. En este sentido, no puede ser una excepción la extensión de un concepto bajo el que sólo caiga un único objeto, y así, por ejemplo, la extensión del concepto "Catedral de Colonia" no sería idéntica, para FREGE, a la Catedral de Colonia misma (sí siéndolo para los representantes del punto de vista atacado por él). Esta diferencia se aclara especialmente en el artículo de FREGE "Kritische Beleuchtung einiger Punkte in E. Schröders Vorlesungen über die Algebra der Logik" [7]. FREGE demuestra allí que la identificación que establece SCHRÖDER entre un individuo y la clase, a la

---

cepto vacío, que es distinta de lo Falso. A este resultado se llega también por otro camino. Introdúzcase "a ∩ u" como abreviatura de la expresión



que se puede construir mediante $/\xi$. Al mismo tiempo, una función, —cuyo valor, en el caso de que el argumento ζ sea un curso de valores, es precisamente el valor de la función correspondiente a este curso de valores—, se explica al tomar como su argumento ξ el argumento de $\xi \cap \zeta$; por el contrario, si el argumento ζ no es ningún curso de valores, entonces $\xi \cap \zeta$ tiene para todo argumento el valor $\grave{\varepsilon}(\neg\, \varepsilon = \varepsilon)$. Según esto, $\Delta \cap \grave{\varepsilon}\Phi(\epsilon)$" —expresión de la caída de un objeto en una extensión conceptual— es sinónima de "$\Phi(\Delta)$", y tenemos en $\xi \cap \zeta$ lo que hoy se denomina la relación entre "elemento" y "conjunto". FREGE ha entendido sus cursos de valores como una precisión de lo que en la Matemática de su tiempo se usó como "conjunto" —uso acrítico, según su opinión justificada. Cf. Gg II 148.

[7] Archiv für systematische Philosophie 1 (1895) 433-456.

que aquél pertenece como único individuo, lleva a contradicciones. Demuestra además que estas contradicciones pueden evitarse si se parte de la interpretación de que "la extensión de un concepto tiene su existencia no en los individuos, sino en el concepto mismo, i.e. en lo que se dice de un objeto cuando se subsume en un concepto" (KB 451). Así, en la doctrina del concepto freguiana, tiene "la extensión de un concepto... en el mismo concepto y sólo en él su apoyo" (ibíd. 455).

Estos argumentos aclaran de nuevo el carácter de los cursos de valores como objetos abstractos, o como FREGE dice, como "objetos lógicos". Así como fueron aceptados sin más lo Verdadero y lo Falso, aún no siendo objetos reales sino "objetivos no reales", así FREGE considera que objetos abstractos del tipo de cursos de valores son también legítimos:

"Tratamos en Aritmética de objetos que no nos son conocidos por mediación de los sentidos como algo extraño del mundo exterior, sino que son dados de modo inmediato a la razón, que puede examinarlos completamente como algo propio suyo" (Gl. 115).

Sin embargo, todas estas descripciones son demasiado vagas para responder a la mayoría de las cuestiones concretamente formuladas sobre cursos de valores. Una de estas cuestiones es la que versa sobre la relación entre función y curso de valores. Mientras que, según la interpretación usual, los cursos de valores —como objetos— deben ser radicalmente distintos de las funciones, recientemente algunos autores vinculados al Círculo de Munich sustentan un punto de vista diametralmente opuesto. Así, dice BARTLETT:

"El extraño parecido entre la escritura propuesta por FREGE y los operadores-lambda, usuales hoy, hace sólo más claros los hechos fundamentales: Sus cursos de valores no son otra cosa que una objetivación de las funciones, no objetivas en sí; todas estas objetivaciones de las funciones son equivalentes entre sí —las diferencias entre las notaciones no corresponden a ninguna diferencia en las cosas. El rango de valores de una función es sólo la función interpretada como objeto" (*ob. cit.* 58).

En el mismo sentido se expresa SLUGA:

"La diferencia entre una función y su curso de valores, según parece, es exagerada por lo general. En verdad, el curso de valores no es nada más que la función vista de una nueva manera: La función considerada como objeto. La diferencia entre función y curso de valores es más una diferencia de aspectos que una diferencia de objetos. La función se diferencia del curso de valores en que la función no está saturada, i.e. dicho sintácticamente, el signo funcional contiene lugares argumentales, mientras que el curso de valores está saturado" (l.c. 202).

Lo sorprendente en este punto es la forma categórica en que ambas aserciones son emitidas. Pues, aunque ya es difícil ver en qué se apoya

propiamente la interpretación sostenida por SLUGA, parece que BARTLETT se contradice, ya que antes había insistido en que para la solución de los problemas difíciles que surgen en torno a la temática de función y curso de valores "debe presuponerse la distinción rigurosa entre ambos conceptos" (op. cit. 53); y, asimismo, apoya en la proposición, que sigue inmediatamente a la cita anterior, la diferencia entre función y curso de valores "en la diferencia radical que media entre funciones y objetos". Querer reducir esta diferencia radical a una "diferencia radical de aspectos" —a semejanza de lo que hace SLUGA— sólo podría ser una solución de compromiso.

¿Habría de buscarse el motivo de la "objetivación" de las funciones en el giro freguiano (citado poco antes por BARTLETT), no totalmente feliz, de que un concepto debe "ser convertido (!) en un objeto" (BuG 197), para poder ocupar el lugar de sujeto? Contra esto se debería objetar que en el lugar citado por BARTLETT, FREGE se corrige inmediatamente: "Hablando más exactamente" el concepto debe "ser *representado* por un objeto" (l. c.). Pero, entonces, el concepto y el objeto representante del anterior deben ser distintos, si tiene sentido decir que uno representa al otro. El lugar citado —presuponiendo siempre que BARTLETT se apoya en él— podría apoyar la tesis bartlettiana sólo si se pudiese justificar que en él es un supuesto tácito que el objeto, que representa al concepto, es idéntico al curso de valores, por consiguiente a la extensión del concepto. El que sea ésta la opinión de BARTLETT, lo demuestra su comentario a las páginas 196-198 del artículo "Ueber Begriff und Gegenstand" de FREGE:

> "De este lugar se obtiene con claridad conocimiento sobre el uso de las palabras de FREGE: Pues considera las palabras
> "el concepto *hombre*"
> "La extensión del concepto *hombre*",
> "La clase de los hombres"
> todas como de igual Sentido y Referencia" (Op. cit. 62).

Pero, ¿se sigue este hecho realmente e, incluso, "con claridad"? De cualquier modo, hay intérpretes familiarizados con el lugar al que se refiere BARTLETT y que, sin embargo, se han decidido por no aceptar la identidad de objeto representante y extensión conceptual:

> "Pero ¿cuál es el objeto que 'representa' el concepto *es un hombre* en la aserción 'el concepto es *un hombre* no es vacío'? FREGE no lo dice. El único objeto que está inmediatamente conectado con el concepto es la extensión de este último. Pero con seguridad no es esto lo que refiere una expresión del tipo "el concepto 'es *un hombre*'" [8].

---

[8] H. KHATCHADOURIAN: *Frege on Concepts*. En: Theoria 22 (1956) 85-100, cita pág. 94. Se encuentra también allí la observación correcta de que en ningún caso entra en cuestión la interpretación de RUSSELL, según la cual el objeto representante consta de las mismas palabras (cf. RUSSELL, *Principles*, 2.ª Ed. 510, § 483; en la traducción española, pág. 578).

¿Quiénes tienen ahora la razón? La tesis bartlett-sluguiana podría reforzarse todavía. Por ejemplo, FREGE ha respondido a una crítica de una observación suya contenida en *Grundlagen* —sobre el hecho de que en la definición de número se puede sustituir las palabras "extensión del concepto" por "concepto"— del modo siguiente: "Se observará aquí que esta palabra (i.e. "concepto") está ligada por el artículo determinado" (BuG 199). Posteriormente ha interpretado la fórmula

$$\text{‘}\ \overset{\smile}{\text{—}\mathfrak{a}\text{—}}\ \Phi(\mathfrak{a}) = \Psi(\mathfrak{a})\text{”}$$

no sólo como "$\Phi(\xi)$ y $\Psi(\xi)$ tienen el mismo curso de valores", sino también como "el concepto Φ es el mismo que el concepto Ψ" (ASB). También ha proporcionado un criterio (expresamente designado como tal) para detectar la relación existente entre conceptos que corresponda a la identidad de objetos, aludiendo a la Referencia alterada de la palabra "lo mismo": Lo que dos palabras conceptuales refieren es lo mismo si, y sólo si, las extensiones conceptuales correspondientes coinciden" (ASB). Pero, se buscará en vano un criterio claro para decidir si las palabras "el concepto $\Phi(\xi)$" refiere la extensión conceptual $\grave{\varepsilon}\Phi(\varepsilon)$, por tanto de si ésta es o no es el objeto representante del concepto. Nuestra opinión es que FREGE ha evitado conscientemente decidirse. Sospechamos que él mismo no pudo aducir ningún motivo lo suficientemente concluyente como para justificar un fallo a favor o en contra de la identidad entre objeto representante y curso de valores; y que, por este mismo motivo, dejó abierto el camino a ambas posibilidades:

> "Si se habla de la identidad de funciones, se puede sólo pensar en la identidad de sus cursos de valores, o (!) en la identidad de algo que esté conectado unívocamente con los cursos de valores" (FREGE a RUSSELL, 3.8.02).

¿Por qué había de denominar perifrásticamente "objeto referido por el concepto '$\Phi(\xi)$'" al objeto representante del concepto $\Phi(\xi)$, si este objeto era simplemente la extensión de $\Phi(\xi)$? A partir de las declaraciones de FREGE apenas se podrá fundamentar la aserción de identidad en cuestión.

¿Qué sucede con la interpretación —independiente de ésta— de que en la diferencia radical entre función y curso de valores se trata tan sólo de una diferencia de "aspecto" y no de objeto? En favor de este punto de vista parece hablar en principio la circunstancia de que el nombre del curso de valores "$\grave{\varepsilon}\Phi(\varepsilon)$" se diferencia en general del nombre "$\Phi(\xi)$" de la función correspondiente sólo en que en aquél aparece cazado el lugar vacío. Sin embargo ha de subrayarse a este respecto que nada de esto se puede inferir de la notación usada, puesto que, por principio, para cualquier objeto que pueda ser coordinado unívocamente a una función $\Phi(\xi)$, se podría fijar mediante una convención particular un nombre de la forma "$\hat{\varepsilon}\Phi(\varepsilon)$". Pero, por este mismo motivo, el "extraño

parecido", en que insiste BARTLETT, de la notación de FREGE "$\grave{\varepsilon}\Phi(\varepsilon)$" con "$(\lambda x)(\Phi(x))$" tampoco es apropiado para favorecer la convergencia aseverada entre función y curso de valores. El hecho de que sea superflua en la lógica de FREGE una distinción entre abstracción de clase y abstracción de función (puesto que FREGE interpreta las proposiciones como nombres propios de un valor veritativo), demuestra sólo que tanto las clases como las "funciones", obtenidas por abstracción funcional, son cursos de valores en el sentido de FREGE [9]. Pero funciones son para él algo muy distinto. Nunca pueden ser obtenidas por abstracción, pues en ésta hay siempre una trasposición de una relación de equivalencia en una igualdad de objetos abstractos; pero, para FREGE es la "relación de igualdad... una (función) de primer grado, a la que sólo convienen objetos y no funciones" (FREGE a RUSSELL, 3.8.02). Por tanto, las funciones no pueden ser obtenidas por abstracción, puesto que todos los productos de abstracción son objetos. Por ello, tiene, naturalmente, razón CHURCH al aseverar que las funciones de FREGE son "objetos abstractos no lo suficientemente reales", aunque tampoco su caracterización positiva parezca exacta: "Un tipo de abstracción incompleta" [10]. Con todo, el parecido entre nombres de cursos de valores y términos-lambda no tiene ninguna importancia para la relación entre cursos de valores y funciones en sentido freguiano.

Es más, hay una serie de argumentos en *contra* de la rectitud de la tesis bartlett-slugiana. Si se ve en un curso de valores $\grave{\varepsilon}\Phi(\varepsilon)$ sólo la función $\Phi(\xi)$, considerada como objeto, entonces ha de admitirse también este hecho en el caso de los cursos de valores especiales que, según la estipulación de FREGE, son iguales a lo Verdadero o a lo Falso. Por tanto, por ejemplo, $\grave{\varepsilon}(-\varepsilon)$ no sería nada más que la función $-\xi$, tan sólo considerada como objeto. Con otras palabras, lo Verdadero y el concepto, bajo el que caiga lo Verdadero y sólo él, serían uno y el mismo objeto, observado sólo bajo perspectivas diferentes, consecuencia totalmente inadmisible para la posición freguiana, puesto que con ella la diferencia entre función y objeto resultaría ilusoria. Por tal motivo renunciaremos a la admisión de tales entidades, semejantes a la cabeza de JANO, y nos atendremos al hecho de que FREGE con la distinción entre función y curso de valores quiso designar una diferencia de objetos, no sólo una diferencia de aspectos, pudiendo ser consideradas las funciones también como objetos con sólo alterar algo su notación. Así (y sólo así) podemos hacer justicia al intento de FREGE de crear en la conceptografía una lingua característica, que expresase cómo son las cosas mismas y que no mostrase en su simbolismo ninguna división que no correspondiese a las existentes en la esfera de las Re-

[9] Cuando QUINE observa que en FREGE "sentences are assimilated to terms and classes to functions", no piensa, naturalmente, en ninguna función en sentido freguiano, sino en los objetos obtenidos por abstracción funcional. Véase W. V. QUINE, *Set Theory and its Logic*, Cambridge, Mass. 1963, 71 n.

[10] A. CHURCH: *Schröder's Anticipation of the Simple Theory of Types*. En: The Journal of Unified Science (Erkenntnis) 9 (1939) 149-152 (151).

ferencias. Puede omitirse la tesis bartlett-sluguiana simplemente en cuanto que sólo toma en cuenta la saturación o no-saturación de expresiones, no de la saturación o no-saturación de su Sentido y su Referencia, aun cuando FREGE considere primordial la última distinción y sólo la vea reflejada en los signos.

Por tanto, los cursos de valores no tienen con las funciones una relación diferente a la de los restantes objetos; no constituyen una excepción cuando FREGE escribe: "Los objetos se encuentran frente a las funciones. Considero objetos, según ello, todo lo que no es una función, por ejemplo números, valores de verdad y cursos de valores, que se introducen más abajo" (Gg I 27). Así pues, la diferencia entre función y objeto "existe con todo rigor" (BuG 201), pues "sólo por ilusión puede pensarse que un concepto puede convertirse en objeto sin alterarlo" (Gl X). Si se intenta clarificar giros poco precisos del tipo "función *como* objeto" o "más una diferencia de aspecto", se ve que esta interpretación deja abierta la puerta al punto de vista de KERRY [11], rechazada muy claramente por FREGE en el artículo "Ueber Begriff und Gegenstand", teniendo en cuenta que tal autor "quiere que la diferencia entre concepto y objeto no tenga un valor absoluto" (BuG 193), y que quiere ver expresado en la designación de una cosa como objeto o concepto sólo su diferente forma de caer bajo un concepto" (cf. BuG 205). Por tanto, una interpretación de FREGE o tan sólo un desarrollo ulterior en su dirección no podrá verse en el hecho de que pueda ser o no posible (y conveniente) una convergencia entre función y curso de valores hasta la simple diferencia de "aspecto" [12].

[11] B. KERRY, *Ueber Anschauung und ihre psychische Verarbeitung*. En: Vierteljahrsschrift für wissenschaftliche Philosophie, 9 (1885) 433-493; 10 (1886) 419-467; 11 (1887) 53-116, 249-307 (aquí sobre FREGE); 13 (1889) 71-124, 392-419; 14 (1890) 317-353; 15 (1891) 127-167.

[12] Los cursos de valores permanecen en el dominio de los objetos, si se los interpreta como conjuntos de ciertos argumentos (así, en SCHWEITZER, según el cual "hay que interpretar materialmente los cursos de valores como conjuntos de valores argumentales": op. cit. 103 n), o como conjuntos, cuyos elementos son pares formados por un argumento y un valor funcional correspondiente siempre (véase B. V. BIRJUKOV, O rabotach Frege po filosofskim voprosam mathematiki, traducción inglesa en: *Two Soviet Studies on Frege*, publ. por I. ANGELELLI, Dordrecht 1964, págs. 1-51. Aquí, en particular, 152 ss.).

Es comprensible la segunda interpretación en cuanto que FREGE se ha orientado con el concepto (o por lo menos, el término) de curso de valores en la exposición gráfica usual de un "curso funcional". Mientras que aquí el curso de valores de una función es la secuencia de valores funcionales en relación a una ordenación de los argumentos, adoptada por base, la concepción citada en segundo lugar intenta liberarse de una ordenación determinada del dominio de argumentos. El propósito de FREGE de precisar, primeramente, el concepto de conjunto mediante el de curso de valores es abandonado aquí —en cuanto que con el recurso usado se forman, evidentemente, *conjuntos de conjuntos.*

Según la interpretación citada en primer lugar y representada, p. ej., por SCHWEITZER, una extensión conceptual ha de concebirse evidentemente como el conjunto de aquellos argumentos, cuyos nombres proporcionan un nombre de lo Verdadero, al introducirse en el lugar vacío del nombre del concepto. Esto parece más plausible (véase I. ANGELELLI, Introducción a: *Two Soviet Studies on Frege*, op. cit., XV) en vista de la concepción tradicional de la extensión conceptual como conjunto —o totalidad, cosa que allí no está todavía diferenciada—

En el panorama precedente a la introducción de los números como extensiones de conceptos determinados, FREGE ha designado a los cursos de valores "una de las más fructíferas complementaciones" (Gg I 16), sin adivinar, naturalmente, que diez años después, RUSSELL, con la antinomia conocida con su nombre, descubriría una consecuencia de esta complementación que, junto con otras, hundiría el sistema de FREGE por ser contradictorio.

Esta problemática se le muestra ya al lector, familiarizado con esta situación, en aquel lugar en que FREGE, al final de § 9 (donde trata la designación de los rangos de valores), asevera: "Con esto se amplía, al mismo tiempo, el círculo de lo que puede aparecer como argumento de una función" (Gg I 16). La legitimidad de esta ampliación constituye el problema central de la lógica freguiana, que se encuentra en estrecho contacto con el principio básico de FREGE de que toda expresión bien formada tiene, con seguridad, una Referencia. Hemos de investigar en qué sentido es "ampliado" algo aquí. Por ello, debemos abordar en primer lugar la ingeniosa interpretación de SCHWEITZER (op. cit.) que, lo mismo que BARTLETT, atribuye capital importancia al problema de la ampliación.

Según SCHWEITZER, cualquier signo conceptográfico que no pertenezca al dominio de signos primitivos, propuesto por FREGE, debe "ser admitido en el círculo de los nombres referenciales de la conceptografía" (op. cit. 97). Para ello hay dos caminos: El camino trivial de la definición explícita, i.e. la introducción de un nuevo signo como abreviatura de una expresión ya admitida en la conceptografía; y el camino que SCHWEITZER denomina complicado, en el que cualquier conexión admisible del nuevo signo con signos ya admitidos ha de considerarse que tiene la misma Referencia que una expresión conceptográfica ya admitida como un todo. Puesto que en el segundo caso el nuevo signo es introducido no como un signo singular, sino como un componente de ciertas conexiones de signos conceptográficos, estas estipulaciones no tienen el carácter de definiciones. Por tanto, ¿con qué razón puede aseverarse que el

---

de los objetos, que caen bajo el concepto. Sin embargo, también contra esta interpretación se alzan objeciones. Entre las objeciones posibles más importantes se encuentra la de que, con esto, no se puede cumplir la concepción de FREGE de las extensiones conceptuales como un caso especial de los cursos de valores, puesto que una función cualquiera, en general, no necesita tener designado un valor, mediante el cual un subconjunto del dominio de argumentos pudiera ser designado como curso de valores. (¿Qué conjunto de argumentos se tendría que imaginar como curso de valores de la función log ξ?). El hecho de que FREGE, en el caso de los valores veritativos, identifique el curso de valores de $-\xi$ con lo Verdadero y el de $\xi = \neg\breve{\upsilon}\neg\upsilon = \upsilon$ con lo Falso, apoya sólo aparentemente el punto de vista cuestionado aquí. Mientras que según la concepción tradicional (así como según la representada por SCHWEITZER, y, similarmente, por ANGELELLI) de la extensión conceptual, hay que identificar *todo* objeto con la extensión de un concepto, bajo el que caiga aquél solamente, FREGE establece expresamente (Gg. I 18 n. 1; véase a este respecto pg. 74 s. y 77 arriba) que en su concepción de los cursos de valores *no* se puede cumplir una ecuación de esta índole en general. Dejamos para una investigación especial la discusión rigurosa de esta difícil cuestión.

nuevo signo ha de tener una Referencia a partir de estas estipulaciones? SCHWEITZER fundamenta la legitimidad de esta introducción admitiendo una peculiar interpretación del término "Referencia" que plantea FREGE en *Grundlagen*. Según dicha interpretación, un nombre objetual refiere algo en la conceptografía si, y sólo si, "cualquier expresión conceptográfica en la que aparezca está explicada". Así, pues, el nombre objetual 'a', para tener Referencia en la conceptografía, no necesita designar algo aisladamente" (op. cit. 99). Como apoyo de lo dicho son citados argumentos de FREGE, que (como veremos más tarde, de modo característico) son tomados en su mayoría de los *Grundlagen* de 1884, como la breve observación siguiente: "Sólo en el contexto de una proposición las palabras refieren algo" (Gl. 73).

¿Qué se sigue de esta peculiar interpretación de "Referencia"? Por ejemplo, según SCHWEITZER —en un lugar previo a la explicación de los nombres de cursos de valores— el signo "ℂ" de la Luna podría ser admitido en la esfera de los nombres referenciales de la conceptografía mediante la explicación de todas las expresiones que resultasen de la colocación de "ℂ" en los lugares vacíos de los nombres de funciones de primer grado, explicados hasta entonces. Así, por ejemplo, para las conexiones de "ℂ" con el signo de igualdad habría de fijarse las Referencias de las expresiones:

"ℂ = ℂ".
"ℂ=lo Verdadero",
"ℂ=lo Falso,

donde sólo se tomarían en cuenta como Referencias lo Verdadero y lo Falso, por supuesto no porque hasta entonces no hubieran sido introducidos otros objetos (como piensa SCHWEITZER), sino porque la explicación de la igualdad sólo presupone estos dos. El ejemplo del signo "ℂ", que todavía hemos de criticar en lo sucesivo, sirve en SCHWEITZER de preparación para la descripción del método mediante el cual pueden ser introducidos los nombres de cursos de valores. Su exposición es breve:

> "FREGE designa el curso de valores de una función $\Phi(\xi)$ mediante" $\grave{\varepsilon}\Phi(\varepsilon)$." Los nombres de cursos de valores aparecen como nombres objetuales de la lógica freguiana y no pertenecen, como el nombre "ℂ", al dominio primitivo de nombres referenciales. No se pueden... introducir por el camino trivial; de modo que sólo queda el camino complicado. Para que sean nombres *referenciales* —lo mismo que en la introducción del nombre "ℂ"—, es necesario y suficiente fijar en qué casos los nombres objetuales, resultantes de los nombres de funciones primitivas... por introducción de nombres de cursos de valores y nombres de lo Verdadero o de lo Falso, deben ser nombres de lo Verdadero o de lo Falso respectivamente" (op. cit. 100).

Por ejemplo, en correspondencia más estricta con la introducción, bosquejada arriba, del signo "ℂ", habrá de fijarse cuándo las expresiones de la forma siguiente denotarán lo Verdadero o lo Falso:

"NCV de una función=NCV de una función",
"NCV de una función=Nombre de lo Verdadero",
"NCV de una función=Nombre de lo Falso".

SCHWEITZER termina el breve fragmento con la indicación de que FREGE ha expuesto las estipulaciones precisas en los §§ 3, 10, 11 y 12 de los *Grundgesetze* y que, por este medio, ha introducido los nombres de cursos de valores en el sentido de la exposición dada.

Comenzamos con la crítica del ejemplo de la introducción ficticia del nuevo signo "ℂ". Para la comprensión completa de este peculiar ejemplo se debe saber que SCHWEITZER, por una parte, designa los nombres de cursos de valores como los únicos nombres objetuales de la conceptografía no introducidos trivialmente, y que, por otra, expresamente conjetura que FREGE "quiso convertir en nombres referenciales de la conceptografía otros nombres para los que no era viable el camino trivial" (op. cit. 97 n 9). SCHWEITZER se remite a un artículo de FREGE [13] en el que critica a las definiciones de PEANO el no ser formuladas para cualesquiera argumentos (de los admisibles en grados y lugares), sino sólo para números: Mientras que también hay que tener en cuenta el caso en que como argumento de "ξ" o de "$\xi > \zeta$" sea introducido, por ejemplo, el signo "⊙" del Sol. Con todo, ¿se puede inferir realmente de aquí que FREGE ha querido introducir en el desarrollo de la conceptografía los signos "⊙" o "ℂ"? En principio se podría tender a una respuesta afirmativa, atendiendo al lugar siguiente de la *Begriffsschrift* en el que FREGE, enumerando los usos posibles de la conceptografía, piensa:

"Me parece que es más fácil todavía extender el dominio de este lenguaje formal hasta incluir la Geometría. Tan sólo se deberían introducir signos para las relaciones intuitivas que allí ocurren. De este modo se realizaría una especie de *analysis situs*" (Bs. XII).

Pero, precisamente este lugar puede servir para aclarar en qué sentido no armoniza la conjetura de SCHWEITZER con el punto de vista de FREGE. No se ampliará el acopio de signos de la conceptografía como un calculus ratiocinator, sino que los lenguajes formales de otras ciencias serán adjuntados a la conceptografía como lingua característica de la Lógica y Aritmética, de tal modo que como signos argumentales de funciones (de primer grado) no sólo puedan aparecer de nuevo nombres objetuales de la conceptografía, sino también nombres objetuales de los lenguajes formales adjuntados [14]. Para llevar a cabo una ampliación en este sentido se han de tomar todas las precauciones y, de hecho, FREGE lo hace al constatar la posibilidad de "otros argumentos" en sus explicaciones de fun-

[13] G. FREGE: *Ueber die Begriffsschrift des Herrn Peano und meine eigene.* En: Berichte über die Verhandlungen der Königlich Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig. Mathematisch-physische Classe, 48 (1896) 361-378 (374).

[14] Allí donde las funciones en cuestión expresen leyes lógicas, se tratará, por lo demás, sólo de una aplicación de leyes absolutamente válidas para objetos.

ciones —en las que ya no ocurren alternativas completas. Cualquiera de las explicaciones de funciones, dadas en *Grundgesetze,* es, por tanto, una estipulación del tipo exigido por FREGE con las siguientes palabras:

> Es, por tanto, necesario hacer estipulaciones de las que resulte lo que refiere, p. ej.," "⊙+1", si "⊙" refiere el Sol" (FuB 19).

Pero no sólo se puede demostrar que FREGE no quiso introducir en la conceptografía signos como "ℂ"; el ejemplo del signo "ℂ" puede clarificar, además, que la interpretación dada por SCHWEITZER sobre el método de introducción no puede ser correcta: No se puede concebir cómo, sólo mediante la explicación de toda conexión con "ℂ", este signo ha de tener una Referencia, que sólo aproximadamente corresponda a su Referencia, bien determinada, como signo de la Luna. FREGE no se inclina a usar este método, demasiado parecido al llamado Definiciones de Uso [15], pues cuando el signo "ℂ", como componente de un lenguaje formal astronómico adjuntado, ocupe un lugar argumental de una expresión conceptográfica, tendrá ya en el lenguaje adjuntado un significado determinado. Pero, entonces tampoco podrá ser introducido en la conceptografía, que por sí misma sólo es una lingua characteristica de la Lógica y de la Aritmética, y no necesita en modo alguno signos astronómicos como "⊙" o "ℂ". Lo que necesita son signos para objetos lógicos, y, como tales, son introducidos los nombres de cursos de valores.

Para entender lo que ocurre realmente en la introducción de los nombres de cursos de valores, vamos a suponer que, en principio, hemos propuesto el sistema de la conceptografía como un puro "juego formal" y que, posteriormente, hemos hecho ciertas estipulaciones sobre la Referencia para dar un contenido a las fórmulas, pero que no estamos seguros de que no pueda haber alguna expresión compleja —aunque correctamente formada según las reglas del cálculo— para la cual no haya presupuesta, en nuestras estipulaciones, Referencia alguna. ¿Cómo podríamos decidir si nuestras estipulaciones son suficientes en el sentido de que impiden que ocurra una situación tal? Observemos cualquier expresión compuesta del sistema. El último de los pasos que la forman —como todo paso de esta índole— parte de un signo funcional y de uno o más signos argumentales. Si (y sólo si) estos signos poseen una Referencia, la expresión compuesta tendrá también una Referencia. El método de reducción, posibilitado por este medio, se detiene en los signos primitivos. ¿En virtud de qué sabemos que estos signos primitivos poseen una Referencia? A este respecto, FREGE proporciona un criterio que es aplicable a cualquier dominio de signos funcionales y argumentales. FREGE considera que un signo funcional posee Referencia, si está

---

[15] En SCHWEITZER no hay ninguna referencia de cómo se distingue entre el procedimiento de introducción de la interpretación y las definiciones de uso, rechazadas de un sólo golpe, excepto la designación de las últimas como "definición".

explicado para todo argumento apropiado [16]. Puesto que en los casos concretos siempre se ha de tratar de nombres de argumentos y de valores funcionales, se dirá más rigurosamente que un sistema de estipulaciones concede una Referencia a cualquier signo funcional del dominio, si todo nombre, resultante de la colocación de un signo argumental referencial en los lugares vacíos de un signo funcional, tiene una Referencia. Estas estipulaciones otorgan también una Referencia a cualquier nombre *de objeto*, si su colocación en los lugares vacíos de todo nombre de funciones de primer grado no proporciona más que nombres objetuales con Referencia (por lo cual han de llenarse los lugares vacíos existentes con signos argumentales referenciales). Así, pues, si una función (digamos, monádica) de primer grado está explicada totalmente, entonces sólo puede resultar una expresión no referencial al introducirse un signo de argumento, si este mismo signo no tiene Referencia alguna. Evidentemente estas condiciones son correlativas y sólo verificables en el dominio de los signos funcionales y argumentales dado de antemano. Se debe clarificar lo que este criterio puede y no puede hacer. En cualquier caso, este método no puede contribuir en nada al juicio de si un sistema de estipulaciones sobre la Referencia es adecuado a algunas imágenes materiales, pues el criterio sólo enuncia algo sobre si las expresiones investigadas tienen una Referencia. Qué Referencia sea ésta en cada caso, es asunto que no le atañe. Dicho de otro modo, no obtenemos respecto de una expresión la respuesta "el signo tiene una Referencia", sino la respuesta: "Han sido hechas estipulaciones para asegurar al signo una Referencia."

Se puede hacer un empleo interesante, aunque problemático (y todavía hoy no completamente claro), del método, al considerar dos dominios determinados de signos, el primero de los cuales sea abarcado por el segundo, que únicamente contendrá un nombre objetual más; establezcamos posteriormente para cada uno de estos dominios un sistema de estipulaciones sobre la Referencia, de modo tal que para los signos comunes a los dos dominios coincidan las estipulaciones sobre la Referencia. Por tanto, por una parte, se pueden investigar ambos dominios independientemente; pero, por otra parte, se observa que en el segundo caso se repite innecesariamente una parte de las operaciones hechas en el primer dominio. Este hecho se puede evitar, si se interpreta el segundo dominio como una *ampliación* del primero. Entonces se ha de responder tan sólo la cuestión de cómo deben hacerse las estipulaciones con las que hay que completar el dominio inicial, para que el dominio ampliado sea siempre un dominio de nombres referenciales, si esto es cierto res-

[16] De aquí se siguen las determinaciones específicas de las diferentes funciones en § 29. ¡Obsérvese su formulación hipotética! Para la interpretación, véase Gg. II 78: "Volvemos a ver aquí también que las leyes de la Lógica presuponen conceptos fuertemente delimitados y, con ello, también explicaciones completas de los nombres funcionales —p. ej., del signo más. Hemos expresado esto(!) en el primer volumen así: todo nombre funcional debe tener una Referencia". Además Gg. I 11 y Gg. I 9 n. 3.

pecto del dominio inicial. Aquí se ve fácilmente que el criterio de FREGE demuestra que el dominio ampliado es un dominio de nombres referenciales si, y sólo si, las estipulaciones añadidas al sistema del dominio inicial no otorgan en modo alguno una Referencia al signo "nuevo", sino sólo a todas las *conexiones* del mismo con signos del dominio inicial. Es exactamente a esta situación a la que se refiere SCHWEITZER cuando piensa que la explicación de todas las conexiones con el nuevo nombre objetual (i.e. su explicación como signo argumental de toda función) *otorgaría* a este mismo una Referencia. Pero la improcedencia de esta conclusión está clara: Olvida que el criterio sólo puede demostrar que para un signo ha sido establecida una estipulación sobre la Referencia, no qué Referencia le conviene en virtud de esta estipulación.

Con todo, se puede hablar naturalmente de un método de ampliación en conexión con el criterio freguiano, si se entiende claramente en qué sentido es ampliado algo aquí. En este punto algunas explicaciones de FREGE no son totalmente inequívocas, como tampoco era totalmente afortunada la manera que tenía de referirse a una ampliación del dominio de objetos en la proposición citada en esta obra (pág. 83). Después de haber formulado en § 29 las condiciones bajo las cuales una expresión conceptográfica es referencial, FREGE hace el comentario siguiente:

"No hay que interpretar estas proposiciones como explicaciones de las palabras 'tener referencia' o 'referir algo', porque su empleo siempre presupone que se conozcan ya algunos nombres como referenciales; pero pueden servir para ampliar progresivamente la esfera de tales nombres. Se sigue de ellas que cualquier nombre formado a partir de nombres referenciales refiere algo" (Gg I 46).

El dominio inicial del sistema freguiano, en el que se ha de verificar este método, consta sólo de los ocho nombres funcionales primitivos (cf. Gg I 48). FREGE comienza la prueba de que éste es un dominio de nombres referenciales con las siguientes palabras:

"Partimos del hecho de que los nombres de los valores de verdad refieren algo, a saber, lo Verdadero o lo Falso. Ampliamos luego progresivamente el círculo de los nombres a reconocer como referencias, en cuanto demostramos que los a aceptar con los ya aceptados forman nombres referenciales, en cuanto los unos ocupan los lugares argumentales de los otros" (Gg I 48).

Ya el hecho de que la primera proposición —tomada literalmente— sea una tautología demuestra que aquí hemos de ocuparnos menos de la formulación del plan que de lo que sucede realmente en su ejecución. Por ello es recomendable, en general, no hablar de un dominio inicial y de su ampliación, sino considerar el dominio de *todos* los nombres que provengan de nombres funcionales primitivos por formación correcta. A estos nombres pertenecen tanto los nombres de cursos de valores como los nombres de los dos valores veritativos que no resultan de "$\grave{\varepsilon}\varphi(\varepsilon)$" por introducción. Por tanto, no se trata de la "introducción" de nuevos nombres, sino de probar que todos los nombres correctamente

formados son referenciales. Ahora el hablar de una "ampliación" se relaciona solamente con la ampliación progresiva del dominio de los nombres ("a reconocer como referenciales"), *ya legitimados*. Esta legitimación progresiva debe comenzar en alguna parte, de lo contrario las introducciones en signos funcionales proporcionarían sólo expresiones que a su vez habría de demostrarse que son referenciales. FREGE obtiene el dominio inicial al fijar que cualesquiera nombres de los valores veritativos, que en las explicaciones de las funciones son denominados nombres de lo Verdadero y de lo Falso, son referenciales. Puesto que los nombres funcionales eran referenciales, si las funciones mismas estaban explicadas completamente, se ha de examinar ahora si esta condición se cumple en cada caso. En el caso de los conceptos y relaciones, así como en el de funciones de universalidad, resulta inmediatamente que los nombres de estas funciones son referenciales. Se puede comprobar que FREGE, en párrafo 31, procede tal como aquí se ha dicho. También ha intentado examinar de esta manera las restantes funciones. Llegó a la conclusión de que toda expresión correctamente formada de la conceptografía es referencial. El descubrimiento de RUSSELL de la antinomia, conocida con su nombre, demuestra, sin embargo, que FREGE se equivocó en su prueba de la "completud semántica". Más de veinte años antes de que RUSSELL descubriera la antinomia, HEINRICH SCHOLZ hizo la siguiente aserción, tan válida entonces como hoy:

> "Una explicación clara de este grave fracaso no se ha encontrado hasta hoy, a pesar de todos los esfuerzos que se han hecho en esta dirección" [17].

Es lícito subrayar aquí que una explicación evidente del fracaso de la lógica freguiana no puede resultar de la creación de más y más sistemas axiomáticos (libres de contradicción) para el llamado Cálculo de Predicados Generalizado, sino sólo de un análisis fundamental del método mismo de construcción freguiano. Pero no existe todavía un análisis de tal índole —principalmente porque la Lógica de FREGE es conocida en los círculos especializados sólo por su "fracaso". Pues, aunque la precisión de los medios de expresión freguianos fue lo que posibilitó el descubrimiento de la antinomia —derivable, también, como se estableció posteriormente, de otros sistemas de entonces—, la existencia de la misma bastó evidentemente para hacer aparecer como una pérdida de tiempo cualquier dedicación seria a este sistema. Apenas puede explicarse de otro modo el que durante décadas no fuese hecho el intento de encontrar el error de la lógica de FREGE. Es más: La idea fundamental de la construcción freguiana y el intento de demostración era (y todavía hoy es) casi desconocido. Por primera vez en 1935 SCHOLZ y SCHWEITZER [18] alu-

[17] H. SCHOLZ: *Was will die formalisierte Grundlagenforschung*? En: Deutsche Mathematik 7 (1942, aparecido en 1944) 206-248 (242).

[18] H. SCHOLZ y H. SCHWEITZER, op. cit. (véase nota, pág. 58). El tipo de referencia, que se encuentra allí (pág. 99 n. 12), a un artículo inédito de F. BACHMANN ("FREGE *als konstruktiver Logizist*") fortalece nuestra sospecha de que, en este

dieron a ello, sin citar el verdadero motivo del fracaso del sistema de FREGE (y, presumiblemente, sin conocerlo). Es característico que, por primera vez, en 1938, LEŚNIEWISKI e, independientemente de él, QUINE en 1955 y GEACH en 1956 demostraron que la solución —propuesta por FREGE en el epílogo de los "Grundgesetze" y considerada también por RUSSELL (cf. Principles 522) como solución— evita la antinomia russelliana, pero favorece la aparición de otras antimonias [19].

BARTLETT tiene el mérito significativo de haber descubierto en 1961 el auténtico error de la demostración freguiana [20]. Pudo demostrar que FREGE no logró asegurar una Referencia a toda expresión correctamente formada de su sistema. La demostración freguiana de la completud contiene una laguna nunca percibida por el mismo FREGE. Se encuentra en la argumentación referente al nombre funcional "$\grave{\varepsilon}\varphi(\varepsilon)$", que, en verdad, no puede demostrarse que sea referencial. Pues, a este respecto, debería ser demostrado, según los criterios de FREGE, que el nombre propio, resultante de la introducción de "$\grave{\varepsilon}\Phi(\varepsilon)$" en un nombre de una función monádica de primer grado "$\Psi(\xi)$", tiene siempre una Referencia, si "$\Phi(\xi)$" es referencial. Para funciones *simples* $\Psi(\xi)$ FREGE ha probado esta afirmación; sin embargo, parece haber supuesto que esta misma afirmación sería trivialmente correcta en el caso de una función *compuesta*. Pero esto no es así. Considérese, por ejemplo, la expresión:

$$\text{“}\underset{\smile}{\text{—}\,f\,\text{—}}\; f(\grave{\varepsilon}\Phi(\varepsilon))\text{”} \qquad \text{(A).}$$

Esta expresión es referencial sólo si toda expresión de la forma $\Psi(\grave{\varepsilon}\Phi(\varepsilon))$ es referencial. Pero esto no se puede demostrar, pues esta forma la tiene la misma expresión A, de la que queremos demostrar que es referencial. Caemos, por tanto, en un círculo vicioso, que hace imposible demostrar con los recursos freguianos que la expresión A es referencial.

En el ejemplo elegido podría creerse que el defecto del sistema freguiano se podría evitar ampliando las estipulaciones sobre la Referencia existentes simplemente con una estipulación para la expresión A y repi-

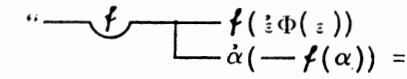
---

tiempo, tampoco era conocida en Münster la laguna de la demostración freguiana. El manuscrito del artículo inédito está hoy —según una amable comunicación del Prof. BACHMANN, el 27.10.62—, por desgracia, perdido.

[19] El análisis inédito de LESNIEWSKI fue expuesto por B. SOBOCINSKI: *L'Analyse de l'antinomie Russellienne par Lešniewski*. En: Methodos 1 (1949) 94-107, 220-228, 308-316, y 2 (1950) 237-257. Los otros dos trabajos son W. V. QUINE: *On Frege's Way Out*. En: Mind 64 (1955) 145-159; y P. T. GEACH: *On Frege's Way Out*. En: Mind 65 (1956) 408-9. La "solución" de FREGE se encuentra en el epílogo al 2.º volumen de los "Grundgesetze". Observaciones interesantes al intento de solución de FREGE y a las antinomias derivables en el sistema revisado se encuentran en BARTLETT (op. cit.), así como recientemente en M. D. RESNIK: *Some Observations related to Frege's Way Out*. En: Logique et Analyse, n. s. 7 (1964) 138-144.

[20] J. M. BARTLETT: *Funktion und Gegenstand. Eine Untersuchung in der Logik von Gottlob Frege*. Phil. Diss. Munich 1961, pág. 72 s.

tiendo este mismo proceso para toda "excepción" semejante. Sin embargo, la consideración, por ejemplo, de la expresión



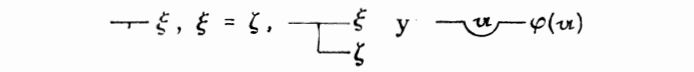
(A'),

ligada estrechamente con A, demuestra que tampoco tendría éxito un intento de tal índole. Tampoco se puede demostrar que la expresión A' es referencial, puesto que en el curso del retroceso necesario a este respecto habría de demostrarse que toda expresión de la forma $\Psi(\dot{\varepsilon}\Phi(\varepsilon))$ es referencial, siendo la misma A' una expresión de este tipo. Un complemento de las estipulaciones sobre la Referencia debería adjuntar o bien lo Verdadero o bien lo Falso como Referencia a la expresión A', como una expresión de universalidad que es. Sin embargo, FREGE mismo ha demostrado (Gg II 256 s.), que cualesquiera de estas dos estipulaciones sobre la Referencia conduce a una contradicción. En la investigación de FREGE queda, por tanto, en pie el problema de si son posibles y, en caso de serlo, cómo son posibles estipulaciones sobre la Referencia que permitan construir un sistema semántico completo sobre una base inmutable en lo esencial. Naturalmente, aquí todo depende de qué bases se quiera considerar como "inmutables en lo esencial"; sin embargo, nos parece —aunque no podemos fundamentarlo aquí más rigurosamente— que no nos bastan para nuestro intento cambios "sólo accidentales". Pues, si se prescinde de la existencia "en sí" de funciones y de su cognoscibilidad inmediata y se hace referencia a los medios de exposición de la Lógica, dados en cada caso, entonces ya no se puede admitir más que en el dominio de variabilidad de "f" en "$\vdash f(\Delta)\ldots)$" se encuentra ya $\vdash f(\xi)\ldots)$. Pero está claro que una limitación tal sería "esencial": En FREGE las expresiones cuantificadas con dominio de variabilidad ilimitado aparecen ya entre los nombres primitivos.

¿En qué contribuyen las discusiones de este capítulo a la solución de la cuestión inicial sobre la Referencia de los nombres de cursos de valores? No nos hemos adherido a la interpretación schweitzeriana según la cual dentro de la conceptografía podía distinguirse un dominio inicial sin nombres de cursos de valores tal que las Referencias de todas las expresiones del dominio ampliado por la adición de nombres de cursos de valores fueran reducibles a las de las expresiones del dominio inicial. A este respecto señalábamos que el criterio de FREGE no puede mostrar sino que para expresiones determinadas han sido establecidas estipulaciones sobre la Referencia; e igualmente señalábamos que este criterio no puede averiguar o, en general, otorgar la Referencia a un nombre de curso de valores.

¿En qué lugar de la conceptografía tenemos, entonces, conocimiento de esta Referencia? La respuesta es la siguiente: En la conceptografía no tenemos conocimiento, en general, de una Referencia de tal índole. Es presupuesta, más bien que conocida —así como el conocimiento de los

dos valores de verdad o la familiaridad con lo que sea la universalidad de un juicio. Por supuesto, en cualquier curso de valores singular no se apela a la familiaridad con cursos de valores. Entra ya en el signo funcional "$\grave{\varepsilon}\varphi(\varepsilon)$". Así como para la comprensión de los argumentos "ordinarios" (y no tomados en cuenta, primeramente, para el cumplimiento del principio de completud) de las funciones



ya hemos recurrido a la pre-comprensión de lo que en la praxis lógica aparece como negación, igualdad, consecuencia lógica y universalidad, así también en la función $\grave{\varepsilon}\varphi(\varepsilon)$, cuyo nombre puede leerse "curso de valores de...", se apelará a nuestra familiaridad con la extensión de conceptos[21]. A partir de este conocimiento y del conocimiento de la Referencia de un nombre funcional determinado se obtiene, entonces, la Referencia del nombre de curso de valores correspondiente. Lo mismo vale, por otra parte, para el Sentido de estas expresiones, para las que —lo mismo que respecto de la Referencia— hay que referirse a la interpretación de que por medio del contexto de cualesquiera expresiones —en particular de proposiciones— puede otorgarse un Sentido (una Referencia) a un signo que ocurra en ellas y que aisladamente carezca de Sentido o de Referencia respectivamente.

Nuestra discusión debería haber clarificado suficientemente que en la introducción de nombres de cursos de valores en la conceptografía la alusión a las observaciones de Frege sobre el contexto proposicional está fuera de lugar. Estas mismas explicaciones especialmente la aserción de que los signos sólo tienen Sentido y Referencia en el contexto de una proposición— requieren, sin embargo, en un trabajo sobre el problema del Significado una investigación mucho más profunda de lo que era posible en el caso de los nombres de cursos de valores. Pero esta investigación requiere una serie de preparativos, el más importante de los cuales será un estudio riguroso del artículo freguiano "Ueber Sinn und Bedeutung", el "texto fundamental de la Semática moderna" (BARTLETT).

---

[21] Apenas se necesitará subrayar que en el recurso a una precomprensión intuitiva no hay nada ilegítimo, si se quiere dotar de antemano al cálculo usado de una interpretación, como hace FREGE, cf. capítulo 1.2. Puesto que aquí se dice explícitamente qué reflexiones intuitivas han conducido a la elección precisamente de estos signos primitivos y de estas leyes básicas precisamente, se debe dar la preferencia a este procedimiento frente a los sistemas axiomáticos de la Lógica o Aritmética en los que, en el mejor de los casos, el lector está seguro de que este o aquel axioma es "plausible", porque esto o aquello se lo hace intuitivo.

2.1. EL ARTICULO "UEBER SINN UND BEDEUTUNG"

Los problemas que surgen en torno al Sentido y la Referencia difieren considerablemente de los tratados en el capítulo precedente. Mientras que allí se trataron cuestiones de la Lógica y del Cálculo Lógico que, sin duda, FREGE consideró ontológicamente relevantes, las cuestiones en cuya discusión entramos ahora son más bien de naturaleza gnoseológica. Así, es una reflexión gnoseológica la que induce a FREGE a volverse a plantear en el artículo "Ueber Sinn und Bedeutung" la cuestión, ya tratada en *Begriffsschrift,* de la esencia de la igualdad (identidad). El razonamiento de FREGE puede reproducirse del modo siguiente. Si se quisiera comprender la igualdad como una relación entre objetos, o mejor dicho: de un objeto consigo mismo, entonces un juicio verdadero de la forma "a=b" expresaría la misma relación de igualdad que el juicio "a=a". Ambos juicios no se diferenciarían en su valor cognitivo —en contraposición a la existencia incuestionable de juicios de la forma "a=b", que no son fundables apriori, como el juicio analítico "a=a".

A partir de estos fundamentos, FREGE había indicado en *Begriffsschrift* (1879) que la igualdad sería una relación entre nombres o signos para objetos. Ahora le parece también problemática esta indicación. Si en la proposición "a=b" se hablara factualmente sólo de los signos "a" y "b", entonces "no interesarían ya las cosas mismas, sino tan sólo nuestra manera de referirlas" (SuB 26), y sólo expresaría nuestra decisión arbitraria el uso de "a" y "b" como signos para el mismo objeto. ¿Cómo debe entenderse, por tanto, el hecho de que haya juicios verdaderos de la forma "a=b" —totalmente incuestionables— que "contienen valiosas ampliaciones de nuestro conocimiento" (SuB 25) y que no se logran por referencia a las reglas de nuestro sistema de signos? FREGE concluye que los signos "a" y "b" no se diferencian exclusivamente "como objetos" (i.e. como figuras); pero, antes de emprender la tarea, considera necesario hacer un análisis de los juicios de igualdad, que conduzca a un resultado más valioso que el obtenido mediante la explicación dada en el *Begriffsschrift.*

Si se presupone que "a=b" es verdadero, entonces "a=a" y "a=b" pueden tener distinto valor cognitivo, sólo si "a" difiere de "b" no sólo por la forma, sino también "en el modo de designar algo...". "Una diferenciación puede tener lugar sólo en cuanto la diversidad de los signos corresponda a una diversidad en el modo de presentarse de lo designado" (SuB 26). Lo que quiere decir esto, lo explica FREGE en un ejemplo. Sean a, b y c las bisectrices de un triángulo; por consiguiente, según un principio de Geometría elemental, el punto de intersección de a y b es

idéntico al punto de intersección de b y c, de modo que vale la proposición:

"El punto de intersección de a y b es el mismo que el punto de intersección de b y c."

Las expresiones "el punto de intersección de a y b" y "el punto de intersección de b y c" son, por tanto, designaciones distintas del mismo punto. Pero estos nombres "indican al mismo tiempo el modo de presentarse, de ahí que en las proposiciones esté contenido un conocimiento real" (SuB 26).

De acuerdo con esta reflexión, FREGE piensa que con un signo se conecta, además de lo designado, que él llama la *Referencia* del signo todavía algo "en lo que está contenido el modo de presentarse" y que él denomina *Sentido* del signo (SuB 26). En los nombres del ejemplo citado, este Sentido es diferente, mientras que la Referencia es la misma. Sucede otro tanto en el ejemplo freguiano de la "estrella vespertina" y "la estrella matutina", donde se trata también de descripciones y, por tanto, de nombres propios sólo en sentido lógico. En el artículo de 1892 se distingue sólo entre el Sentido y la Referencia de nombre propios en el sentido fijado, dejando las expresiones de conceptos y relaciones, expresamente, para el artículo "Ueber Begriff und Gegenstand" (SuB 27).

Entonces, ¿se puede, a partir del hecho de que FREGE designe como Sentido el "modo de presentarse" del objeto —conectado con un nombre propio—, concluir su status como entidad plenamente válida? No encontramos una respuesta directa a esta cuestión. Según opinión de FREGE, el Sentido de un nombre propio es "comprendido por cualquiera que conozca suficientemente la lengua o la totalidad de las designaciones a las que aquél pertenezca" (SuB 27). No se quiere decir con ello que en los lenguajes naturales y, también, en los lenguajes científicos usuales la Referencia significada por los nombres exista realmente, y, aun cuando sea éste el caso, siempre es "iluminada sólo parcialmente" por el Sentido (SuB 27). Por esto debe decirse que el Sentido no conduce a un "conocimiento general de la Referencia". De un conocimiento tal podríamos hablar sólo si "pudiéramos indicar de cualquier Sentido si pertenece o no a ella (i. e. a la Referencia dada). Hasta allí nunca llegamos" (SuB 27).

A primera vista podría considerarse lo dicho como una manifestación de escepticismo. Efectivamente, F. RIVETTI BARBÒ [1] supone que FREGE ha ido más lejos de lo que propiamente deseó, pues FREGE no aceptaría con seguridad la consecuencia de la negación de todo conocimiento. Con todo ¿es real esta consecuencia? Nos parece que la interpretación de RIVETTI BARBÒ no se ajusta en este punto a la intención freguiana. A decir verdad, si bien se puede esperar en el caso de los nombres *simples* de obje-

[1] F. RIVETTI BARBÒ: *Il "Senso e Significato" di Frege: Ricerca teoretica sul senso e designato delle espressioni, e sui valori di verità.* En: Studi di filosofía e di storia della filosofia in onore di Francesco Olgiati. Milán, 1962. (Pubblicazioni dell'Università Cattolica del Sacro Croce. Ser. III: Scienze filosofiche, 6).

tos que su Sentido no sea conocido o, en general, comprensible independientemente de su Referencia, este hecho no valdrá ya para los nombres *compuestos* de objetos, como se aprecia en las descripciones —ejemplos preferidos por FREGE— de la forma "el x para el que A(x) vale". Para cualquiera que conozca el Sentido de la expresión "A(x)", toda la expresión tendrá un Sentido; pero su Referencia se conocerá sólo si se conoce un x con la propiedad A(x) y se sabe que es el único objeto con esta propiedad. Pero a menudo no tenemos este conocimiento. Podríamos afirmar, a título de ejemplo, que el Sentido del nombre

> "el mayor número natural n, para el que la ecuación $x^n+y^n=z^n$ puede cumplirse de modo no trivial para todos los números x, y, z"

pertenece a la Referencia del nombre "2", de modo que tendríamos resuelto el problema-Fermat. Pero el que sea ésta la coordinación correcta sigue siendo una suposición tan sólo, y ello es evidente en el caso de nombres compuestos objetuales en los que FREGE piensa, siempre que subraya la parcialidad con la que el Sentido ilumina la Referencia de los nombres propios. Así como del número 2 no sabemos si le conviene o no la propiedad citada y así como no conocemos muchas otras de sus propiedades, así también hay expresiones de cualquier Referencia de un nombre de objeto para las cuales el problema de la pertenencia o no pertenencia del Sentido a la Referencia dada está sin resolver de momento. La existencia de una infinidad de cuestiones sobre una Referencia dada expresaría, a decir verdad, la limitación de nuestro conocimiento, pero, por otro lado, es tan trivial que su verificación en FREGE no puede adoptar el carácter de "escepticismo".

Si toda expresión correctamente formada de un lenguaje no tiene asegurada una Referencia, entonces no hemos de decidir sólo la vinculación de un Sentido dado a una Referencia dada. Hemos de plantear precedentemente la cuestión más elemental de si para una expresión dada existe o no una Referencia. Según FREGE, "una expresión formada de manera gramaticalmente correcta, que responda a un nombre propio, siempre un Sentido" tiene (SuB 28), pero no podemos estar seguros, sin más, de que también tenga una Referencia. Así, por ejemplo, la expresión "El astro más distante de la Tierra" tiene un Sentido, pero no tiene, posiblemente, una Referencia, y en el caso de la expresión "Las series convergentes más pequeñas" —que sin duda tiene pleno Sentido— se puede probar incluso la carencia de Referencia, al demostrar que no puede haber tales series.

Aunque en esto y en la "parcialidad de la iluminación" los lenguajes naturales y los lenguajes científicos coinciden, difieren en otros aspectos. Mientras que en un lenguaje ideal puede ser dada una Referencia de modos diferentes y comunicarse un Sentido determinado mediante expresiones distintas, sin embargo a cada signo le corresponde exactamente un Sentido y a cada Sentido exactamente una Referencia; la relación entre signo y Sentido es, por tanto, una relación más unívoca que la

existente entre Sentido y Referencia. Por el contrario, en los lenguajes naturales debemos contentarnos con que "la misma palabra tenga el mismo Sentido en el mismo contexto" (SuB 28). Se pensará, respecto de lo dicho en último lugar, en el cambio de Sentido por el contexto lingüístico o situacional, pero también en la aparición de homónimos; esto último no sólo en la forma "tosca" de la equivocidad de las palabras o signos de igual forma (p. ej., "Schloss", "e"), sino también en una forma más sutil que FREGE ha analizado sagazmente. "Si se usa una palabra del modo corriente, aquello de lo que se habla es su Referencia. Pero puede suceder también que se quiera hablar de las palabras o de su Sentido" (SuB 28), por ejemplo si se citan las palabras de otro. En este caso, que FREGE designa "estilo directo", las propias palabras refieren "en primer lugar las palabras de otro y sólo éstas tienen la Referencia ordinaria" (SuB 28). En la exposición escrita, este caso se reconoce por el uso de comillas en la mayoría de los casos. Las palabras situadas entre comillas no tienen entonces su Referencia ordinaria: "A" es la expresión que tiene por Referencia A, y "'A'" designa dicha expresión.

Un caso parecido acontece cuando se quiere hablar del *Sentido* de una expresión "A". Puesto que aquí se debe acudir a circunlocuciones del tipo "El Sentido de la expresión "A"", la llamada "Referencia indirecta" es, como tal, fácilmente recognoscible y sólo requiere énfasis en usos como "P dice que..." o "El pensamiento de que A"[2].

Como quiera que las expresiones tienen también un Sentido propio —aunque no tengan la Referencia ordinaria, sino la "directa" o "indirecta"— hay que distinguir del Sentido ordinario un Sentido directo e indirecto (análogamente al caso de las Referencias).

No hay que confundir el Sentido con la *Imagen*: "Hay que distinguir de la Referencia y del Sentido de un signo la Imagen asociada con él" (SuB 29). Esta última es subjetiva, constreñida a un individuo que observa, y no es rigurosamente identificable con imágenes de otro individuo, exactamente "porque no podemos tener juntos estas imágenes en la misma conciencia" (SuB 30). Pero el Sentido de una expresión puede ser "propiedad común de muchos" (SuB 29), como, para FREGE, lo demuestra "el hecho de que la humanidad tiene un caudal común de Pensamientos, que se trasmite de una generación a otra" (ibíd.).

Para ilustrar este hecho, podemos situar (por su particularidad de

[2] Se da este caso sólo cuando es atribuido también a las proposiciones un Sentido, aunque ya estaría incluido en el presente análisis de FREGE del estilo directo e indirecto. La formulación del texto evita conscientemente la limitación a palabras singulares, que únicamente son consideradas como casos especiales. Mientras que en el estilo directo no hay ninguna objeción contra este procedimiento, en el caso del estilo indirecto se deberá objetar que el tomar el Pensamiento como Sentido de la proposición —cosa que evidentemente se hace— se aproxima peligrosamente a una petitio principii. Esto se verá claramente sólo cuando FREGE quiera demostrar la posibilidad de extender el esquema Sentido-Referencia a proposiciones. Pues allí renunciará a la demostración del cambio característico de Sentido y Referencia en el caso del estilo indirecto, puesto que cree que ya ha atendido al caso de las proposiciones mediante la estipulación anteriormente establecida. Véase nota 11, pág. 101.

ser objetivo-no real) el Sentido "entre" la imagen subjetiva y la Referencia, el objeto. FREGE compara esta relación con la existente en una observación telescópica de la Luna: El objeto Luna, que corresponde a la Referencia, es "mediatizado" por la imagen retiniana del observador, la cual ha de relacionarse con la imagen subjetiva, mientras que la imagen óptica real en el telescopio corresponde al Sentido. "La imagen óptica en el telescopio es, ciertamente, unilateral: Es dependiente de la perspectiva de observación; pero es, con todo, objetiva, en cuanto pueden utilizarla diversos observadores" (SuB 30). Incluso la parcialidad de iluminación del objeto por el Sentido tiene su correspondencia en esta analogía —en cierto modo, imperfecta.

Después de haber hecho estas aclaraciones, FREGE establece una terminología: "Un nombre propio (palabra, signo, conexión de signos, expresión) expresa su Sentido, refiere o designa su Referencia. Expresamos con un signo su Sentido y designamos con él su Referencia" (SuB 31).

Hasta ahora sólo a las descripciones y nombres propios, en sentido gramatical, se les ha adjudicado un Sentido y una Referencia. Casi más frecuente es, sin embargo, hablar de "Sentido" o de "Referencia" de un *Enunciado,* por tanto de una proposición afirmativa, en su totalidad. Se deberá plantear la cuestión —una vez propuesta la comparabilidad[3]— de cómo se relacionan el Sentido y la Referencia de expresiones particulares con el "Sentido" y la "Referencia" de las proposiciones en las que entran como expresiones. Sin querer prejuzgar aquí la cuestión de si las proposiciones mismas han de ser consideradas o no como nombres propios en sentido lógico, FREGE comienza a investigar si las precisiones sobre el Sentido y la Referencia, hechas al hablar de las expresiones hasta ahora consideradas, son aplicables o no a proposiciones. Si no se tiene en cuenta este modo de acceder a la Semántica de las proposiciones, entonces la respuesta de FREGE aparecerá como si se presupusiera todo lo que sólo la reflexión puede probar. Pero, no "todo" se presupone. Se presupone que una proposición afirmativa encierra un Pensamiento[4] y que éste debe ser o la Referencia o el Sentido de la proposición —esto, sin duda (a pesar de la conexión establecida con seguridad entre Pen-

[3] Se puede tener la seguridad de que una Semántica, en la que fuesen desemejantes y estuviesen desconectados el Sentido y la Referencia de la proposición y de la parte proposicional, sería rechazada por ser "inadecuada", "inútil", "inconveniente" (etc. según el punto de vista filosófico de quien juzga). Sería conveniente explicitar los supuestos, adoptados como base de este juicio, puesto que este problema surge con *anterioridad* a las cuestiones usuales de la Semántica (de si tiene la prioridad el Sentido de la proposición o del término, y demás).

[4] FREGE no entiende por "*Pensamiento*" un acto psíquico, "no el acto subjetivo de pensar, sino su contenido objetivo, que es susceptible de ser propiedad común de muchos" (SuB 32). Por lo demás, el uso de FREGE del término "Pensamiento" no es tan ordinario, como a menudo se asevera. Así se dice, hablando con toda naturalidad, que dos descubridores han "llegado casi al mismo tiempo al mismo Pensamiento", sin pensar por ello en una imagen psíquica. La mayor parte de las ocasiones se tratará de un Pensamiento compuesto, en el sentido freguiano.

samiento, Sentido y Referencia), es una presunción de mayor alcance, que, por desgracia, FREGE no considera más de cerca [5].

¡Supongamos que una proposición tiene una Referencia! Por tanto, si una palabra en ella es sustituida por otra de la misma Referencia, aunque de distinto Sentido, este hecho no influirá en modo alguno sobre la Referencia de la proposición. Pero ejemplos sencillos muestran que en tales casos el Pensamiento cambia totalmente. Por ejemplo, las proposiciones "La estrella matutina es un cuerpo iluminado por el Sol" y "La estrella vespertina es un cuerpo iluminado por el Sol" expresan distintos pensamientos, pues —es ésta una argumentación que aparece reiteradamente en FREGE— "nunca, quien no sepa que la estrella vespertina es la estrella matutina, podría tener por verdadero un Pensamiento y por falso el otro" (SuB 32). Según ello, el Pensamiento no puede ser nunca la Referencia de la proposición y FREGE concluye a partir de la segunda presunción —sin considerarla más de cerca— que el pensamiento debe ser, por tanto, el Sentido de la proposición aseverativa.

Entonces ¿hay además una Referencia de la proposición? Se podría pensar que a las proposiciones sólo les conviene un Sentido, pero no Referencia alguna; y FREGE opina que "en cualquier caso podrá esperarse que tales proposiciones ocurran; así como hay partes proposicionales que tienen un Sentido y no tienen una Referencia. Y las proposiciones que contuvieran nombres propios sin Referencia serían de este tipo" (Sub 32). Pero ¿qué nos garantiza en otros casos que la proposición tenga una Referencia? La argumentación de FREGE tiende a justificar que presupondremos una Referencia proposicional siempre que —como ocurre invariablemente en el discurso científico— sostengamos que la parte proposicional aislada tiene una Referencia. Si nos bastase el Sentido proposicional, nos debería bastar también el Sentido de la palabra. Sería. pues, "innecesario preocuparnos de la Referencia de una parte proposicional; para el Sentido de la proposición sólo es importante el Sentido y no la Referencia de esta parte" (SuB 33). Cuando menos en el contexto científico, pero muchísimo también en la vida práctica, no nos basta el Pensamiento de una proposición, "por y en cuanto que nos interesa su valor de verdad... La tendencia a la verdad es, por consiguiente, lo que nos impulsa a pasar del Sentido a la Referencia" (ibíd.).

Suponemos como existente la Referencia de una proposición, siempre que nos interese la Referencia de sus partes componentes. Pero FREGE lleva más lejos su reflexión, pues si "siempre nos preguntamos por el

---

[5] En la cuestión "¿Es este Pensamiento su Sentido (i.e. el de la proposición) o su Referencia? (SuB 32) se querrá ver una expresión de la intención de "jugar" con ambas posibilidades, para concluir en la respuesta "ninguna de las dos". Pero este "remedio" desaparece en cuanto que FREGE, poco más tarde, infiere de la no-identidad de Pensamiento y Referencia proposicional la identidad de Pensamiento y Sentido proposicional.

CARNAP ha mostrado con gran claridad y profundidad los diferentes supuestos de la argumentación de FREGE: "*Meaning and Necessity. A Study in Semantics and Modal Logic*", Chicago 1947, 2.ª Ed. 1956 (3.ª Im. 1960).

valor de verdad", ¿no sería, entonces, la Referencia de la proposición "la circunstancia de que sea verdadera o falsa"? FREGE se decide en este sentido: Ve en la circunstancia del ser verdadero o falso de la proposición, por tanto en su valor de verdad, la Referencia de la proposición. Puesto que una proposición sólo puede ser o verdadera o falsa [6], hay únicamente dos valores veritativos. FREGE los denomina brevemente "lo Verdadero" y "lo Falso".

Lo más sorprendente para el sentido común es que en la doctrina de función y objeto FREGE considere los dos valores de verdad como objetos. Así, pues, si las Referencias proposicionales son objetos, entonces las proposiciones mismas serán nombres de objetos; dicho de modo más expresivo: Las proposiciones son nombres propios, nombres de lo Verdadero o nombres de lo Falso. Al sentido común le parece tan extraño el que se *nombre* algo con proposiciones, que esta observación sólo ha sido aceptada sin peros en casos enormemente raros. Ya RUSSELL —como primer crítico de la Semántica freguiana— ha manifestado sus objeciones a este punto [7]. FREGE mismo había considerado ya algunas objeciones posibles. Así, se dice contra su punto de vista, en primer lugar, que el lenguaje natural usa "verdadero" y "falso" como predicados o bien de proposiciones o bien (según FREGE, más correctamente) de los pensamientos expresados por las proposiciones. De acuerdo con esto, habría que "considerar la relación del Pensamiento con lo Verdadero no como la del Sentido con la Referencia, sino como la del sujeto con el predicado" (SuB 34). FREGE responde a esta objeción de dos maneras distintas. Primeramente, "verdadero" y "falso" se comportan de modo muy distinto al de los predicados ordinarios: No dicen nada, de hecho, sobre un sujeto. Esto es, se observa fácilmente que en la proposición

"El pensamiento de que 5 es un número primo, es verdadero"

no se dice más que en la proposición simple

"5 es un número primo".

Por tanto, se supondría sin motivo que en la primera proposición la aserción del Pensamiento en cuestión radica de hecho en el predicado "verdadero", mientras que en la segunda proposición radica sólo en la forma de la proposición aseverativa; de modo que ambas proposiciones sólo expresan uno —y el mismo— Pensamiento, sin que se diga nada sobre su verdad. Aunque esta circunstancia ya le pruebe a FREGE que aquí no hay una relación sujeto-predicado, todavía se aclarará más este hecho

---

[6] Que en este contexto sólo se puede pensar en proposiciones con Sentido, se desprende de él mismo, pues sólo en el caso de proposiciones tales se puede plantear la cuestión sobre el Sentido y la Referencia proposicionales.

[7] B. RUSSELL: *The Logical and Arithmetical Doctrines of Frege*, Apéndice A de *"The Principles of Mathematics"*, Londres, 1903, 2.ª Ed. 1937, págs. 475-496, resp. 501-522. (Hay traducción española: B. RUSSELL, *Los Principios de la Matemática*, Espasa-Calpe S. A., Madrid, 1948, 2.ª Ed. 1967; Apéndice A: *Las Doctrinas de Frege sobre Lógica y Aritmética*, págs. 475-496, resp. 567-593).

mediante la reflexión de que sujeto y predicado (entendidos en sentido lógico) son "partes del Pensamiento", que se encuentran "en el mismo plano del conocimiento" (SuB 35). Por ello, si se une un predicado a un sujeto, se llega siempre a "un Pensamiento tan sólo; nunca (se llega) de un Sentido a su Referencia, ni de un Pensamiento a su valor de verdad". Pero este último no puede "ser parte de un Pensamiento, como el Sol, porque no es ningún Sentido, sino un Objeto" (ibíd.)[8].

FREGE estima que la falla de esta objeción es un apoyo más para su interpretación de que la Referencia de una proposición es su valor de verdad. Pero si este punto de vista es correcto, entonces todas las proposiciones verdaderas tienen la misma Referencia, i. e. lo Verdadero; así como todas las proposiciones falsas designan lo mismo, a saber, lo Falso. Junto con el Pensamiento —pero también sólo junto con él— el valor veritativo proporciona conocimiento, cuando en el acto de juzgar se lleva a cabo el paso del Pensamiento a su valor de verdad[9].

Aunque FREGE —ciñéndose a la confirmación de su "supuesto" (Sub 35)— indique que los valores de verdad satisfacen la condición de invariancia impuesta a la Referencia proposicional, este hecho puede parecer superfluo o incómodo; con todo, la condición de invariancia había sido elegida precisamente como el hilo conductor de la investigación. No debería olvidarse que en este lugar la propuesta de FREGE queda también en suspenso. FREGE *no* ha podido demostrar —y es difícil concebir cómo lo podría hacer— que el valor de verdad sea lo único invariante. Por ello, FREGE se ha de contentar con constatar un poco retóricamente: "¿Qué podría encontrarse, además del valor de verdad, que perteneciera a toda proposición, en la que importara la Referencia de las partes proposicionales y que permaneciera inalterado en una sustitución del tipo indicado?" (SuB 35). Sin embargo, la rectitud de la equiparación del valor de verdad y la Referencia proposicional sólo ha sido comprobada contra la invariancia en la sustitución de una parte proposicional por una expresión de igual Referencia. Sólo han sido consideradas proposiciones, cuyos componentes no tenían el carácter de proposición, debiéndose hacer todavía la comprobación en el caso de proposiciones compuestas, en las que la parte misma a sustituir sea una proposición. Si el punto de vista de FREGE es correcto, "entonces el valor de verdad de una proposición, que incluya otra como parte, debe permanecer inalterado, si sustituimos la parte proposicional por otra, cuyo valor de verdad sea el mismo" (SuB 36). Pero han de tenerse en cuenta ciertas excepciones, a saber, si la totalidad de la proposición o una parte de la misma están usadas en estilo directo o indirecto; en estos casos, una proposi-

[8] Esta formulación curiosa, según la cual no sólo un objeto no puede actuar nunca de Sentido, sino que Sentido y objeto parecen excluirse mutuamente, se analizará más tarde.

[9] Dejamos para el último capítulo la discusión del texto de FREGE, correspondiente a este punto, sobre la imagen de partes en el caso de los valores veritativos. Este lugar es de poca importancia para el problema del Sentido y de la Referencia.

ción en estilo directo tendrá como Referencia a su vez una proposición, pero si está en estilo indirecto tendrá por Referencia un Pensamiento [10].

El examen de las *Proposiciones Subordinadas,* cuya discusión se emprende con lo acabado de decir, ocupa la totalidad de la parte restante del artículo "Ueber Sinn und Bedeutung". En general, parece evidente suponer que en las proposiciones subordinadas ocurra un caso parecido al del estilo indirecto: la Referencia y el valor de verdad de la proposición tampoco coinciden aquí, pues "los gramáticos consideran las proposiciones subordinadas como representantes de partes proposicionales y las dividen, de acuerdo con ello, en proposiciones sustantivas, adjetivas y adverbiales. Por ello se podría pensar que la Referencia de una proposición subordinada no es un valor de verdad, sino que es semejante a la de un nombre, adjetivo o adverbio, dicho brevemente, de una parte de la proposición que no tiene como Sentido un Pensamiento, sino sólo una parte del mismo" (SuB 36). La división gramatical se deberá sustituir por una división de las proposiciones subordinadas desde el punto de vista lógico, de modo que se reúnan en una clase todas las proposiciones subordinadas que sean "de naturaleza lógica semejante".

El primero de los casos considerados por FREGE es aquél en que se cumple la suposición citada: El Sentido de la proposición subordinada no es un Pensamiento independiente. A este caso pertenecen las proposiciones subordinadas introducidas por "(el hecho de) que", particularmente el estilo indirecto, en el que, según lo dicho anteriormente, "las palabras tienen su Referencia indirecta, que coincide con lo que ordinariamente es su Sentido" (SuB 37) [11]. Una proposición subordinada tal tiene, según ello, "como Referencia un Pensamiento y no un valor de verdad, y como Sentido no un Pensamiento, sino el Sentido de las palabras 'El pensamiento de que...', que sólo es una parte del Pensamiento del período total. Este viene precedido por "decir", "oír", "opinar", "estar convencido", "concluir" y palabras semejantes" (ibíd.).

El hecho de que en el caso considerado la Referencia de la proposición subordinada sea el Pensamiento, lo ve confirmado FREGE en el hecho de que el valor de verdad de la proposición total y el de la proposición subordinada sean independientes uno del otro. Así, para el valor de verdad de la proposición

"FERMAT creyó que $2^2 + 1$ era un número primo"

sólo es decisivo que FERMAT creyera realmente esto, dando lo mismo si su creencia era correcta o no; por el contrario, la verdad o falsedad de

[10] Véase 2.1, nota 2 (pág. 96).

[11] La concepción de FREGE de que esta prueba ya ha sido hecha para el caso de proposiciones, nos había parecido sospechosa según hicimos ver en la observación citada anteriormente (véase 2.1. nota 2). Ciertamente FREGE había dado una formulación de la estipulación anterior sobre el estilo indirecto, la cual incluía evidentemente el caso de las proposiciones; sin embargo, no se puede hacer uso alguno de ella, hasta tanto no se haga completamente la demostración de que los conceptos freguianos del "Sentido" y de la "Referencia" son tan aplicables al caso de las proposiciones como a las descripciones y nombres gramaticales.

la afirmación de que $2^{2^5}+1$ es un número primo, no depende de que FERMAT lo creyera. En las proposiciones

"Copérnico creyó que las órbitas de los planetas eran circulares", y
"Copérnico creyó que la apariencia del movimiento del Sol era producida por el movimiento real de la Tierra"

se puede "sustituir una proposición subordinada por la otra, sin perjuicio de la verdad. La proposición principal junto con la subordinada tiene como Sentido un único Pensamiento, y la verdad de la totalidad no implica ni la verdad ni la falsedad de la proposición subordinada. En estos casos no se puede sustituir en la proposición subordinada una expresión por otra, que tenga la misma Referencia ordinaria, sino tan sólo por aquella que tenga la misma Referencia indirecta, i.e. el mismo Sentido ordinario" (SuB 37). A partir de que, según ello, no se puede sustituir en cualquier proposición compuesta una parte proposicional por otra de igual valor veritativo, no debe concluirse en modo alguno que la Referencia proposicional no sea el valor de verdad; se sigue tan sólo que la Referencia de una proposición *no siempre* es su valor de verdad; por ejemplo, no lo es en el caso acabado de examinar del estilo indirecto o en el de las proposiciones subordinadas finales ("para que..."). La prolijidad aparente de la argumentación hace olvidar la importancia de las investigaciones freguianas en la "sustitución salva veritate", en las que por primera vez se lleva a cabo la distinción de contexto extensional e intensional, que en la Semántica moderna desempeña un papel tan decisivo.

Igualmente tienen Referencia indirecta las proposiciones subordinadas introducidas por "que" tras las palabras "ordenar", "rogar", etc. Aquí, como en los demás casos considerados hasta ahora, las palabras de la proposición subordinada tienen su Referencia indirecta, de donde se explica para FREGE "que también sea indirecta la Referencia de la proposición subordinada misma, i.e. no un valor de verdad, sino un Pensamiento, una orden, un ruego, una pregunta" (SuB 39). La proposición subordinada puede interpretarse aquí, ni más ni menos, como un nombre propio del pensamiento, mandato, etc., correspondiente [12].

[12] Es característico del Pensamiento el poderse aseverar: "Una orden, una petición no son, ciertamente, Pensamientos, pero se encuentran en el mismo nivel que los Pensamientos" (SuB 38). No se altera este punto de vista en el artículo posterior 'Der Gedanke' (1918/19): "No se puede negar un Sentido a una proposición imperativa; pero este Sentido no es tal que se pueda plantear en él la cuestión acerca de la verdad. Por ello, yo no denomino Pensamiento al Sentido de una proposición imperativa. Por esto mismo se excluyen las proposiciones de deseo y ruego" (Ged 62). Pero mientras en la observación de 1892 se podría considerar que el Sentido de una *interrogación* es esencialmente distinto de un Pensamiento, FREGE analiza en el artículo de 1918/19 las proposiciones interrogativas, obteniendo otro resultado: "La proposición interrogativa y la aseverativa contienen el mismo Pensamiento; pero la proposición aseverativa contiene algo más: la aserción. También la proposición interrogativa contiene algo más: un requerimiento." La proposición aseverativa y la interrogativa tienen un contenido

Diferente es el caso de una segunda clase de proposiciones subordinadas "en las que las palabras tienen ciertamente su Referencia ordinaria. sin que, sin embargo, aparezca como Sentido un Pensamiento y como Referencia un valor de verdad" (SuB 39). En la proposición

"Quien descubrió la forma elíptica de las órbitas planetarias, murió en la miseria",

el Sentido de la proposición subordinada no puede ser un Pensamiento, pues debería poderse expresar también un Pensamiento en la proposición principal, cosa que no es posible. El Sentido de la proposición subordinada no es un Pensamiento completo y tampoco su Referencia es un valor de verdad, sino precisamente el que descubrió la forma elíptica de las órbitas planetarias: Kepler. De aquí que, aunque FREGE no lo establezca expresamente, se pueda equiparar el Sentido de la proposición subordinada en cuestión con el Sentido de la descripción:

"El descubridor de la forma elíptica de las órbitas planetarias".

En general, las explicaciones de FREGE sobre la proposición subordinada citada en último lugar representan, al mismo tiempo, un desarrollo de su análisis de las descripciones. Contra la propuesta, acabada de hacer, de identificar el Sentido de la proposición subordinada con el de la descripción "correspondiente", se alza posiblemente —como, por ejemplo, desde el punto de vista de la conocida teoría de las descripciones russellianas— la objeción "de que el Sentido de la totalidad encierra un Pensamiento como parte, a saber el de que había uno que fue el primero en conocer la forma elíptica de las órbitas planetarias, porque, quien considere como verdadera la totalidad, no podrá negar esta parte" (SuB 39 s.). Con todo, para FREGE la circunstancia citada no depende del ser contenido de un Pensamiento de existencia, sino de que en cualquier aserción "siempre (es) evidente la suposición de que los nombres propios simples o compuestos usados tienen una Referencia. Así, si se asevera 'Kepler murió en la miseria', se presupone aquí que el nombre 'Kepler' designa algo; pero no por ello está contenido en el Sentido de la proposición 'Kepler murió en la miseria' la idea de que el nombre 'Kepler' designe algo. Si fuera éste el caso, la negación no debería rezar

'Kepler no murió en la miseria'

sino

'Kepler no murió en la miseria o el nombre 'Kepler' es no-referencial'.

---

común y éste "es el Pensamiento o, por lo menos, contiene el Pensamiento" (Ged 62). Según la concepción de FREGE la conexión es de tal tipo que en la formación de una proposición interrogativa comprendemos ya completamente el Pensamiento, cuya verdad o falsedad ha de ser designada en la respuesta, que requiere la pregunta. Véase, también, R. S. WELLS, *Frege's Ontology*, en: The Review of Metaphysics 4 (1950-51) 537-573; especialmente § 19, donde se hace referencia a la coincidencia de la concepción última de FREGE con los análisis más recientes.

El hecho de que el nombre 'Kepler' designe algo es, más bien, suposición tanto en la aserción

'Kepler murió en la miseria'

como en su contraria" (SuB 40). De aquí que también en el caso de la proposición

(A) "hay uno que descubrió la forma elíptica de las órbitas planetarias"

el valor de verdad dependa de si la proposición subordinada

(B) "que descubrió la forma elíptica de las órbitas planetarias"

"realmente designa un objeto o tan sólo lo hace aparentemente, siendo de hecho no-referencial" (SuB 40). Por otra parte, el criterio de la formación negativa muestra —como en el ejemplo precedente— que esta dependencia no significa sin embargo que la proposición subordinada (B) deba incluir la idea de existencia expresada por (A) como parte de su propio Sentido. El hecho de que, en general, una situación de dependencia del tipo descrito pueda existir, lo estima FREGE como signo de la defectuosidad peculiar del lenguaje; en un lenguaje ideal cualquier expresión, correctamente formada, tendría también una Referencia; no habría ningún nombre propio sólo en apariencia y "nunca dependería de la verdad de un Pensamiento..., el que un nombre propio tuviera una Referencia" (SuB 41).

La tarea siguiente de FREGE es clasificar las llamadas *Proposiciones Adjetivas*. También éstas "sirven para formar nombres propios compuestos, aunque no sólo tiendan a ello, como las proposiciones sustantivas" (SuB 41). Puesto que cumplen la misma tarea que los adjetivos, pueden ser fácilmente reemplazadas por éstos; así la descripción

"La raíz cuadrada de 4 que es menor que 0"

es reemplazable por

"La raíz cuadrada negativa de 4"

en la que el adjetivo "negativa" ha reemplazado a la proposición adjetiva "que es menor que 0". Pero esto significa que "las expresiones conceptuales... pueden ser formadas de modo que las características sean dadas por proposiciones adjetivas" (SuB 42). Por esto, una proposición adjetiva tampoco tendrá como Referencia un valor de verdad ni como Sentido un Pensamiento; más bien, su Sentido será sólo parte de un Pensamiento, y, ciertamente —como la sustitutividad por adjetivos muestra—, una parte incompleta en el sentido de la doctrina de función y objeto.

Más clara que en las proposiciones adjetivas y adverbiales[13] es la existencia de una parte indicativa indeterminada en las *Proposiciones Condicionales*. En la proposición usada como ejemplo por FREGE

"si un número es menor que 1 y mayor que 0, entonces su cuadrado es también menor que 1 y mayor que 0",

"un número" en la proposición antecedente y "su" en el consecuente son las llamadas partes indicativas indeterminadas que, al mismo tiempo, prestan al Sentido de la proposición la generalidad "que se espera de una ley" (SuB 43). Ni la proposición condicional ni el consecuente tienen por sí solos un Pensamiento completo por Sentido; sólo ambos juntos forman una proposición, que tiene por Sentido un (pero sólo un) Pensamiento como Sentido. Puesto que ya hemos visto el análisis de FREGE del juicio hipotético, no necesitamos entrar más de lleno en este ejemplo. Todo lo más abría que completar la indicación de FREGE de que las proposiciones condicionales pueden ser representadas por proposiciones adjetivas:

---

[13] FREGE asevera en este lugar que también en las proposiciones substantivas existe un componente que indica indeterminadamente (SuB 43). Esta aserción es errónea. FREGE se refiere aquí a la proposición, ya conocida de nosotros:

"Quien descubrió la forma elíptica de las órbitas planetarias, murió en la miseria."

Según FREGE estamos ante un caso en el que "el sujeto gramatical 'quien' no tiene Sentido por sí solo, sino que comunica tan sólo las relaciones con la proposición consecuente 'murió en la miseria'" (SuB 39). Sin embargo no nos parece correcto ver contenida aquí la existencia de un componente que indica indeterminadamente del tipo del existente en las proposiciones adjetivas y condicionales; pues entonces la *Referencia* de la proposición subordinada sería incompleta, cosa que no sucede, puesto que KEPLER es esta Referencia. Ciertamente, "quien" contiene una relación con la proposición consecuente, pero es una relación puramente gramatical, no lógica, puesto que la proposición substantiva no mantiene con la proposición total ninguna otra relación lógica que la de cualquier sujeto (aquí, p. ej., KEPLER). Es comprensible que FREGE se haya dejado engañar por la función doble de "quien", que comunica la relación con la proposición consecuente, en cuanto que, por una parte, constituye el punto de referencia del predicado contenido en la descripción y, por otra, constituye el sujeto gramatical (no lógico), al que se refiere la proposición consecuente "murió en la miseria".

La diferencia entre ambas funciones se aclara, al considerar la forma completa de la proposición:

"el que descubrió la forma elíptica de las órbitas planetarias, murió en la miseria".

Se ve fácilmente que aquí el "el" que comunica la relación con la proposición consecuente, *no* está contenido en la proposición subordinada, la cual, por su parte, no está relacionada con la proposición consecuente, sino con el "el" precedente. Por lo tanto, aunque sea correcto que el Sentido de la proposición subordinada es un *Pensamiento* incompleto, no es, sin embargo, una *entidad incompleta* en el sentido de la doctrina de función y objeto, cosa que implican las palabras de FREGE "componente que indica indeterminadamente". La incomparabilidad de estos casos se verá claramente al hablar de proposiciones condicionales en el texto. El supuesto de FREGE de que hay un "componente que indica indeterminadamente" en la proposición sustantiva, debe quedar como un error inexplicado. Respecto del caso de las proposiciones condicionales, véase además Geom. IV, 377, 379, 400.

"El cuadrado de un número que es menor que 1 y mayor que 0 es menor que 1 y mayor que 0"

tiene, según FREGE, el mismo Sentido que la proposición del ejemplo anterior.

Si el elemento común de la oración principal y de la subordinada no permanece indeterminado, sino que aparece designado por un nombre propio [14], como en la proposición

"Napoleón, que conoció el peligro de su flanco derecho, condujo él mismo su escolta contra la posición enemiga",

entonces se presenta otra situación totalmente distinta. En la proposición se expresan los dos pensamientos siguientes:

1. que Napoleón conoció el peligro de su flanco derecho,
2. que él mismo condujo su escolta contra la posición enemiga.

Al afirmar la proposición total, se afirman las dos partes proposicionales; si una de éstas es falsa, entonces también lo es la totalidad. Si se piensa que el tiempo y el lugar de los sucesos se conocen a partir del contexto, entonces se debe reconocer que la proposición subordinada tiene como Sentido un Pensamiento completo y, por ello, como Referencia un valor de verdad. Es justo esperar que se cumpla nuestra condición de invariancia, de que la oración subordinada sea sustituible también por otra de igual valor de verdad; sólo es aparente la restricción de que en la nueva proposición esté "Napoleón" de sujeto. Pues, según la opinión de FREGE, esto último es una razón puramente gramatical, que se suprime en la forma equivalente (en cuanto a la verdad):

"Napoleón conoció el peligro de su flanco derecho y Napoleón condujo, él mismo, su escolta contra la posición enemiga".

La conexión existente en los últimos casos, donde la verdad de la proposición total implica la de las partes proposicionales, no sigue existiendo "cuando una proposición condicional expresa un Pensamiento completo, en cuanto que en lugar del elemento sólo indicativo contiene un nombre propio o algo similar a él" (SuB 45). Este es el caso de la proposición:

"Si ya ha salido el Sol ahora, el cielo está muy nublado".

---

[14] Se podría intentar demostrar que las palabras de FREGE "componentes que indican indeterminadamente" —en el sentido de la nota anterior— tienen un sentido diferente al que presentan las mismas palabras en los artículos que tratan sobre función y objeto. Entonces la "indeterminación" sería atribuida a toda expresión en la que como sujeto no estuviera un nombre propio (gramatical); de modo que las descripciones y las proposiciones sustantivas, que les son equivalentes, estarían tan indeterminadas como las expresiones con lugares vacíos. Pero nos parece que no puede justificarse esta interpretación. Sin embargo nótese que no se puede rechazar mediante la referencia a la posterior ecuación freguiana de "nombres propios o algo, que les sea equivalente" (SuB 45), puesto que en el lugar considerado no son opuestos los nombres propios lógicos a las expresiones con componentes que indican indeterminadamente, sino a estos componentes mismos.

Se considera que aquí están determinados el tiempo (sólo interesa el presente) y el lugar. Según el análisis freguiano de estas proposiciones, ya conocido por nosotros, aquí es "establecida una relación entre los valores de verdad de la proposición condicional y del consecuente... a saber, la de que no ocurre el caso en el que la proposición condicional refiere lo Verdadero y el consecuente lo Falso" (SuB 45). Por consiguiente, la verdad de la proposición total depende sólo de los valores de verdad de las partes proposicionales y cualquiera de estas partes es sustituible por otra de igual valor veritativo. Las relaciones que aquí resultan son tildadas, frecuentemente, de absurdas, sin embargo se trata tan sólo de errores, motivados por tomarse como base el Sentido lingüístico ordinario de la palabra "si-entonces", mientras que FREGE explica el tipo de uso propuesto por él identificando el Pensamiento de la proposición ejemplificada con el de la proposición

"o bien el Sol no ha salido todavía o el cielo está muy nublado" [15].

Puesto que se trata de la conexión ya reseñada como "condicionalidad", podemos renunciar a una exposición detallada.

Para FREGE queda todavía una serie de casos en los que parece que la proposición subordinada no encaja exactamente en ninguna de las tres categorías estudiadas hasta ahora. La explicación común de estos casos especiales radica, según FREGE, en "que estas proposiciones subordinadas no tienen un Sentido simple" (SuB 46), sino que un Pensamiento subordinado acompaña a un Pensamiento principal y, ciertamente, no en conexión asociativa o de otra manera parecida, en último caso subjetiva, sino tal que el Pensamiento subordinado pertenece al Sentido de la proposición como parte real. Se puede ejemplificar esta interpretación en el caso de la proposición anterior:

"Napoleón, que conoció el peligro de su flanco derecho, condujo él mismo su escolta contra la posición enemiga".

Pues, puede opinarse en este caso que, además de los dos Pensamientos citados arriba (pág. 106), se expresa también "que el conocimiento del peligro fue el motivo por el que condujo su escolta contra la posición enemiga" (SuB 47). Si esto es exacto, no puede sustituirse la proposición subordinada, que comienza por "que", por otra de distinto Sentido, pero con igual valor de verdad. Evidentemente, también deberá contarse con la posibilidad de que una proposición "en virtud de su conexión con otra exprese más que por sí sola" (SuB 47). Esto significa —y FREGE está totalmente dispuesto a sacar esta consecuencia— que podría haber "más Pensamientos simples que proposiciones" (ibíd.), ya que hay Pensamientos simples que pueden ser expresados como Pensamientos subordinados de una proposición compleja, pero no mediante una proposición singular independiente.

[15] Se trata del "o" no exclusivo.

Tras giros como "se conoce", así como en conexiones con las palabras "creer", "saber", "reconocer", etc... la ocurrencia de un pensamiento del tipo citado es muy normal. Consideremos, por ejemplo, la proposición

"Bebel se imagina que los deseos de venganza de Francia pueden calmarse mediante la devolución de Alsacia-Lorena."

Aquí FREGE encuentra "expresados dos pensamientos, pero de ellos no pertenece uno a la proposición principal y otro a la subordinada, a saber:

1. Bebel se imagina que los deseos de venganza de Francia pueden calmarse mediante la devolución de Alsacia-Lorena;
2. Los deseos de venganza de Francia pueden no calmarse con la devolución de la Alsacia-Lorena" (SuB 47 s.).

Así, puede considerarse que la proposición subordinada tiene en la proposición total diferentes Referencias, propiamente dos, de las cuales una es un Pensamiento (puesto que el primer Pensamiento parcial está en estilo indirecto) y la otra es un valor de verdad. Puesto que el último caso sólo representa una parte y no la totalidad de la Referencia de la proposición subordinada, no se puede sustituir ésta, salva veritate, por otra de igual valor veritativo.

Todavía es más frecuente que aparezca un caso como el que tenemos en la proposición

"Puesto que el hielo es específicamente más ligero que el agua, flota en el agua."

Aquí están expresados los siguientes Pensamientos:

1. El hielo es específicamente más ligero que el agua,
2. si algo es específicamente más ligero que el agua, flota en el agua,
3. el hielo flota en el agua.

Por ello, en la proposición subordinada

"Puesto que el hielo es específicamente más ligero que el agua"

se expresa, además del primer Pensamiento, una parte del segundo.

En la proposición

"Si el hierro fuera específicamente más ligero que el agua, flotaría en el agua"

nos encontramos con un caso muy semejante. "Tenemos aquí los dos Pensamientos de que el hierro no es específicamente más ligero que el agua, y de que algo flota en el agua si es específicamente más ligero que el agua. La proposición subordinada expresa un Pensamiento y una parte del otro" [16] (SuB 49). En este caso, como en el anterior, desaparece la

[16] No está del todo claro por qué FREGE no encuentra expresados como en el caso anterior, *tres* Pensamientos parciales. De cualquier modo, nada parece contradecir el supuesto de que el consecuente expresa el Pensamiento de que el hierro no flota en el agua.

sustitutividad de la proposición subordinada por otra de igual valor veritativo.

FREGE es totalmente consciente de la dificultad de agotar, mediante una clasificación, las múltiples posibilidades ofrecidas por el lenguaje. Refiriéndose a ello, intenta agrupar las razones de "por qué no siempre puede sustituirse una proposición subordinada por otra del mismo valor veritativo, sin perjuicio de la verdad del período total. Estas razones son:

1. que la proposición subordinada no refiera un valor de verdad, en cuanto que expresa sólo una parte de un Pensamiento;

2. que la proposición subordinada refiera, ciertamente, un valor de verdad, pero no se limite a ello, en cuanto que su Sentido comprenda, además de un Pensamiento, una parte de otro.

El primer caso ocurre:

a) en la Referencia indirecta de las palabras,

b) si una parte de la proposición indica algo indeterminadamente, en lugar de ser un nombre propio.

En el segundo caso, la proposición subordinada puede tomarse de una doble forma: unas veces con Referencia ordinaria, otras con Referencia indirecta; o el Sentido de una parte de la proposición subordinada puede ser al mismo tiempo elemento de otro Pensamiento, que, junto con el expresado de modo inmediato por la proposición subordinada, constituya el Sentido total de la proposición principal y subordinada en conjunto" (SuB 49).

Tras la exposición de este extenso análisis, echemos una mirada hacia atrás. La finalidad de la investigación de las proposiciones subordinadas era encontrar una explicación de los casos especiales que ocurren en las proposiciones subordinadas y que parece que contradicen la identificación establecida por FREGE entre la Referencia proposicional y el valor veritativo. Con el análisis efectuado, FREGE considera que queda confirmada perfectamente la rectitud de su doctrina de Sentido y Referencia. Una vez más vuelve al punto de partida de toda la investigación: ¿Qué proporciona al problema de la igualdad, planteado al principio, el uso de los recursos semánticos encontrados? Ambas alternativas, la solución del *Begriffsschrift* y su antítesis, son insuficientes. La claridad sólo surge si se distingue en los enunciados de igualdad entre el Sentido y la Referencia tanto de las proposiciones como de sus partes. FREGE ha formulado el resultado de una manera tan expresiva que no podíamos concluir de modo mejor este capítulo, dedicado al artículo "Ueber Sinn und Bedeutung", que con las palabras con que el mismo FREGE ha resumido su solución al final de dicho artículo:

"Si encontramos que "a=a" y "a=b" tiene un valor cognitivo diferente, la explicación es que, para el valor cognitivo, el Sentido de la proposición, a saber el Pensamiento expresado en ella, no es menos relevante que su Referencia, esto es su valor de verdad. Si a=b, entonces la Referencia de "b" es necesariamente la misma que la de "a" y, por consiguiente, el valor veritativo de "a=b" es el mismo

que el de "a=a. A pesar de ello, el Sentido de "b" puede ser diferente del Sentido de "a" y, por consiguiente, el Pensamiento expresado en "a=b" es diferente del expresado por "a=a"; por lo tanto, ambas proposiciones no tienen el mismo valor cognitivo. Si —como arriba— entendemos por "juicio" el paso del Pensamiento a su valor de verdad, diremos que los juicios son diferentes" (SuB 50).

2.2. DESCRIBIR, DESIGNAR, ASEVERAR

Tras la exposición de las reflexiones de FREGE contenidas en el artículo "Ueber Sinn und Bedeutung" hemos de ocuparnos ahora de las principales objeciones dirigidas a la Semántica de FREGE. Dedicamos este capítulo, en general, a las posiciones críticas referidas a la base del método semántico de FREGE; aquellas otras críticas que dejan intacto, en esencia, el análisis de FREGE, pero cuestionan detalles de su aplicación, las consideraremos en los dos capítulos siguientes. A fin de conseguir una buena visión de conjunto, criticaremos —al mismo tiempo que las exponemos— las objeciones que se basen en errores y no sean responsables de ello deficiencias decisivas o complicaciones de la exposición freguiana. Formularemos de modo breve y preciso aquellas otras objeciones que requieran un análisis o interpretación más rigurosa del texto de FREGE para ser criticadas; a su respuesta está dedicada la segunda parte del capítulo.

Hemos de reconocer que RUSSELL ha sido el primer crítico de la semántica freguiana, cuyas objeciones han visto la luz en tiempos diferentes y desde distintos puntos de vista. Nos limitamos a sus opiniones sobre FREGE contenidas en los *Principles of Mathematics* [1] y en el artículo "On Denoting" [2]. También RUSSELL ha criticado la distinción freguiana entre concepto y objeto. Pero el resultado de esta crítica nos parece relevante para el problema de Sentido y Referencia sólo en cuanto que RUSSELL —de manera distinta a FREGE— admite conceptos como posibles objetos; los conceptos son para él objetos y sus nombres son nombres propios en el sentido de nombres de objeto. Según el punto de vista de RUSSELL de que entre los nombres propios sólo las descripciones tienen Referencia y Sentido, los nombres de conceptos tendrán —como los nombres propios simples ("Juan")— una Referencia, pero no un Sentido. Adelantamos al examen de la crítica russelliana a la semántica de FREGE que la apreciación de las objeciones de RUSSELL presenta la dificultad peculiar de que hay errores manifiestos en numerosos lugares de su exposición del análisis de los juicios de FREGE.

Si se considera el "unasserted proposition" (enunciado no-aseverado)

---

[1] B. RUSSELL: *The Logical and Arithmetical Doctrines of Frege*. Apéndice A de *"The Principles of Mathematics"*, Londres 1903, 2.ª Ed. 1937, 475-496 y 501-522 resp. Nuestro paginado será el de la segunda edición. (Hay traducción española: B. RUSSELL, *Las Doctrinas de Frege sobre Lógica y Aritmética*. Apéndice A de *"Los Principios de la Matemática"*, Espasa-Calpe S. A., Madrid, 1.ª Ed. 1948, 2.ª Ed. 1967, págs. 567-573).

[2] B. RUSSELL: *On Denoting*. En: Mind n.s. 14 (1905) 479-493 (Hay traducción española: *Sobre la denotación*. En: *"Lógica y conocimiento"*, Taurus, Madrid, 1966, págs. 53-74).

de RUSSELL idéntico al "contenido enjuiciable" de FREGE, es fácil entender que su concepto de enunciado no-aseverado comprende no sólo el Pensamiento de FREGE, sino también el Pensamiento junto con su valor de verdad. Para poder deslindar ambos, RUSSELL identifica "Pensamiento" y "propositional concept" (concepto enunciativo) y el "valor de verdad" con "assumption" (supuesto), basando esto último en que "FREGE lo denomina, como MEINONG, un supuesto" (Pr 503 n). Esta afirmación no es exacta. En primer lugar, si hay algo en FREGE que equivalga a los supuestos meinongianos, será el Pensamiento, pero no el valor de verdad. En segundo lugar, esta equivalencia parece problemática, no sólo porque los supuestos de MEINONG —como los juicios— son productos psíquicos, sino, ante todo, porque FREGE en el lugar en cuestión (FuB 21) no tiene la intención de hacer uso terminológico alguno de la palabra "supuesto"[3]. Pero, en tercer lugar, es ininteligible lo que el valor de verdad de una proposición tenga que ver con supuestos de cualquier clase que sean, y de hecho RUSSELL se contradice al usar en adelante la expresión "assumption" no para el valor de verdad, sino en el sentido de "enunciado". Según RUSSELL, el punto de vista de FREGE es que "every assumption indicates the true or the false (which are called truth-values), while it means the corresponding propositional concept. The assumption '$2^2=4$' indicates the true, we are told, just as '2^2' indicates 4" (Pr. 503). Aquí no se puede identificar, evidentemente, "assumption" con valor de verdad, pues está claro que un supuesto no puede designar un valor de verdad y ser, al mismo tiempo, este valor de verdad.

RUSSELL no reconoce que sea resultado de un análisis correcto la introducción freguiana de los valores de verdad. No le parece que esté suficientemente caracterizada la aserción como reconocimiento de la verdad de un juicio; más bien, mediante ella lo que se hace es establecer como verdadero *en primer lugar un Pensamiento.* Así, la proposición

---

[3] La cita, en su totalidad, dice: "Según la concepción, expuesta aquí por mí, en '$5>4$ 'o' $1+3=5$' se tiene sólo expresiones de valores veritativos, sin aseverarse nada. Este separar el juicio de lo que es juzgado nos parece inevitable, puesto que, en caso contrario, no sería expresable un mero supuesto: el plantear un caso, sin juzgar sobre su cumplimiento" (FuB 21).

Ya con anterioridad a la nota en "*On Denoting*", RUSSELL había señalado similaridades entre la Teoría de Sentido y Referencia de FREGE y la Doctrina de los Supuestos de MEINONG en su artículo "*Meinong's Theory of Complexes and Assumptions*" (Mind n.s. 13, 1904). Meinong, que desconocía hasta entonces los trabajos de FREGE (véase A. MEINONG, *Über die Stellung der Gegenstandstheorie im System der Wissenschaften,* Leipzig 1907, pág. 4 n 2), creyó ver un parecido. Así escribe en la segunda edición de su obra "*Ueber Annahmen*" (Leipzig, 1910, pág. 6): "Si alguna vez se hiciera una historia de la doctrina de los supuestos —y mucho habla ahora en su favor—, merecería encontrarse a la cabeza una proposición de la disertación de FREGE 'Function und Begriff'..." (sigue la proposición citada por nosotros arriba). Parece que WITTGENSTEIN ha tomado de RUSSELL las palabras "supuesto freguiano"; véase WITTGENSTEIN, *Notebooks* 1914-1916 (publ. por G. E. M. ANSCOMBE), Oxford 1961, pág. 29 y 38; además, *Philosophical Investigations* § 22 (págs. 10-11 de la edición de Oxford de 1958), así como *Tractatus* 4.063 (versión española: Revista de Occidente, Madrid). G. E. M. ANSCOMBE (Mrs. GEACH) ha sido el primero en hacer notar este error: *An Introduction to Wittgenstein's Tractatus,* Londres 1959, 105-6 (nota).

"César murió" asevera el Pensamiento "La muerte de César" y no "La verdad de la muerte de César", que en sí mismo sólo es un Pensamiento que está aseverado en la proposición "La muerte de César es verdadera" y que se diferencia de aquel otro Pensamiento. Si se prescinde de que RUSSELL interpreta los Pensamientos substancialmente en forma de eventos y la verdad de tales eventos (como, la muerte de César) como "factualidades", entonces sólo subsiste la diferencia de que para FREGE las proposiciones "César murió" y "Es verdad que César murió" expresan el mismo Pensamiento (SuB 34; Ged 63). RUSSELL constata posteriormente que quien, como FREGE, interprete las proposiciones como nombres propios, debe considerar que es el Sentido y no la Referencia lo que es aseverado en un enunciado aseverado —objeción que no concierne a FREGE por el simple motivo de que no ha sostenido nunca la interpretación atacada. Como en otra crítica que se encuentra en la misma línea, RUSSELL supone sin motivo que, en la teoría de FREGE de que "todos los enunciados aseverados aseveran la misma cosa" (Pr. 504), lo aseverado en la proposición aseverativa es, según FREGE, la Referencia de la proposición —cuando en FREGE jamás se habla de un objeto de la aserción. Con todo sigue siendo válida otra objeción de RUSSELL que, para poder referirnos a ella, formulamos del modo siguiente:

(1) La relación entre un enunciado y lo Verdadero o lo Falso es completamente distinta de la existente entre una descripción y el objeto descrito por ella; los enunciados no son nombres propios de lo Verdadero o de lo Falso.

Podemos omitir el examen —por lo demás, poco fructífero— de si RUSSELL ha llegado a esta conclusión a través de formulaciones no siempre válidas contenidas en la conferencia "Function und Begriff" de FREGE, pues, evidentemente, no es éste el problema real para RUSSELL. Más bien, se encuentra en la imposibilidad (quizá subjetiva, añade RUSSELL) de separar aserción y verdad. "Un enunciado aseverado... debe ser lo mismo que un enunciado verdadero" (Pr 504), y establecer una separación entre ellos es posible sólo si se entiende por aserción algo psicológico. FREGE facilitó la entrada de elementos psicológicos en su teoría al describir el juicio como reconocimiento de la verdad. Puesto que, según FREGE, el juicio es un acto psíquico (Vern 151), debe causar extrañeza que él, que persigue la depuración de la Lógica de mezclas psicológicas, considere el trazo de juicio en la conceptografía como un signo de igual valor que los restantes. JOURDAIN, en una carta a FREGE (1914), pidió una explicación sobre este punto: "... will you tell me... whether you now regard assertion (⊢) as merely psychological?". Se podrá criticar a FREGE que —a pesar de sus extensas explicaciones y prosecuciones en el artículo "Der Gedanke"— nunca precisó lo suficiente el status del trazo de juicio introducido ya en la primera redacción de la conceptografía, y, en general, el de la aserción. Observaciones como la siguiente pueden oscurecer todavía más la situación: "El trazo de juicio no puede usarse en la formación de una expresión funcional, puesto que no sirve,

entre otros signos, para la designación de un objeto. '⊢ 2+3=5' no designa nada, tan sólo asevera algo" (FuB 22 n). A partir de lo dicho, RUSSELL obtiene (y tal vez debe obtener) la siguiente conclusión:

(2) FREGE ha explicado que los enunciados aseverados no tienen ninguna referencia [4].

Queda por tratar todavía dos argumentos del artículo "On Denoting", trabajo en el que RUSSELL, a pesar del poco tiempo transcurrido desde los "Principles", adopta un punto de vista completamente distinto. Claramente lo muestran las palabras con las que comenta ahora su punto de vista de 1903: "The theory there advocated is very nearly the same as Frege's, and it is quite different from the theory to be advocated in what follows" (Den 106 n). RUSSELL considera que las dificultades, que se presentan en otras teorías de Semántica, se han debido fundamentalmente a un análisis incorrecto de las descripciones. Estas dificultades parece que desaparecen en el análisis de RUSSELL, conocido con el nombre de "Theory of Descriptions", según el cual (entre otras cosas) el Sentido de una proposición, que tenga como sujeto la descripción "el C", no sólo incluye una aserción de existencia sobre C, sino también una aserción de univocidad sobre C. Por consiguiente, si no hay ningún C o hay más de uno, entonces una aserción de este tipo es falsa y, por ello, toda la proposición lo es. Por el contrario, de acuerdo con la teoría de FREGE —según RUSSELL— ha de aceptarse que "ought to be nonsense" (es sin sentido) una proposición como "El actual rey de Francia es sabio"; mientras que —de nuevo según RUSSELL— "it is not nonsense, since it is plainly false" (no es sin-sentido, ya que es, sin más, falsa) (Den 107). También aquí debemos constatar que RUSSELL no ha interpretado correctamente a FREGE. El parecer de FREGE es que una proposición, como la citada, no tiene *Referencia,* y que, por consiguiente, no designa lo Falso, como RUSSELL pretende; pero no es el parecer de FREGE que la proposición sea sin-Sentido. En esto no hay duda alguna, puesto que FREGE en una ocasión muy parecida dice claramente:

"La proposición "Odiseo fue desembarcado en Itaca mientras dormía" tiene evidentemente un Sentido" (SuB 32);

para lo que FREGE adopta como base:

"para el Sentido de la proposición sólo puede tenerse en cuenta el Sentido, no la Referencia de esta parte (sc. del sujeto)" (Sub 33).

A pesar del error russelliano, esta objeción implica tantos aspectos

[4] Pr. 504, en esta formulación. Como fuente se da, equivocadamente, FuB 21 (en la traducción española, pág. 571).

que vamos a hacer una redacción mejorada de la misma en vistas a su ulterior respuesta:

(3) No es cierto que proposiciones, que contengan un nombre propio no-referencial, no designen un valor de verdad; a tales proposiciones les corresponde el valor de verdad lo Falso.

Finalmente, RUSSELL ha desarrollado una objeción más en el artículo de 1905, que, a diferencia de las anteriores, se refiere indirectamente —pasando por la doctrina de las descripciones de FREGE— a la doctrina de Sentido y Referencia. Se basa en la relación de reciprocidad entre Sentido y Referencia. Según RUSSELL: "El Sentido de la primera línea de la 'Elegía' de GRAY" (es) el mismo que "El Sentido de 'the curfew tolls the knells of parting day'", pero éste difiere de "El Sentido de 'la primera línea de la Elegía de GRAY'". Por consiguiente, para expresar el Sentido de una expresión "C" no se debería hablar de "El Sentido de C", sino de "El Sentido de 'C'". Pero esto, opina RUSSELL, es lo mismo que "C". Y de manera análoga, "La Referencia de C" induce a error al referirnos. RUSSELL obtiene de estas reflexiones la conclusión de "that we cannot succeed in both preserving the connexion of meaning and denotation and preventing them from being one and the same" (Den 109).

Ahora bien, sin duda la obtención de esta conclusión es tan oscura como la argumentación misma, a la que se refiere también CARNAP cuando tacha de "rather obscure" ("más bien oscuras") las objeciones de RUSSELL contra la distinción de FREGE de Sentido y Referencia [5]. En esta argumentación sólo es segura una cosa: que no puede ser correcta. En múltiples ocasiones no se distingue entre Signo y Referencia, y asimismo parece que se confunden Signo y Sentido (cuando menos, en su función), lo que sin duda era ya de temer por la observación de RUSSELL: "we shall say both of the phrase and of the meaning that they denote a denotation" (Den 107). Cuando más tarde diga: "when we wish to speak about the *meaning* of a denoting phrase, as opposed to its *denotation*, the natural mode of doing so is by inverted commas" (Den 109) y crea estar reproduciendo, ante todo, el punto de vista de FREGE [6], lo que estará haciendo es interpretar erróneamente (posiblemente es una mala interpretación puramente lingüística) una observación de FREGE en "Ueber Sinn und Bedeutung" (SuB 28). En conclusión, "C" designa en RUSSELL no sólo la expresión "C", sino también el Sentido de esta expresión así como su Referencia, y "El Sentido de 'C'" será lo mismo que "C" [7]. Si se acomete con los recursos semánticos de FREGE el proble-

---

[5] R. CARNAP: *Meaning and Necessity. A Study in Semantics and Modal Logic.* 2.ª Ed. Chicago 1956 (1.ª ed. 1947) 140.

[6] Así ya en el "Apéndice" de 1903 se dice: "if we wish to speak of its meaning, we must use inverted commas or some such device (págs. 27-8)" (Pr 502; las páginas se refieren a SuB). (En la traducción española: "si deseamos hablar de su significado, debemos usar comillas o algo similar (págs. 27-8)", pág. 568.)

[7] Ya en las primeras líneas del artículo, lo que es concebido como nombre aparece una vez con comillas y otra sin ellas. Por esto es difícil decidir si RUSSELL

ma y se trata de distinguir claramente, de acuerdo con FREGE, signo, Sentido del signo y Referencia del signo, entonces resulta que la expresión "El Sentido de 'C'" *designa* el mismo Sentido que "C" *expresa* (donde las comillas se usan de acuerdo con la convención de FREGE). Lo que se entiende o se suele suponer como el Sentido, que la expresión "El Sentido de 'C'" debe tener *por su parte*, es otra cuestión que, por primera vez, ha sido planteada por CARNAP en el contexto de su crítica a FREGE.

CARNAP y CHURCH han sometido a crítica las objeciones de RUSSELL contra la doctrina de FREGE sobre Sentido y Referencia. Mas la primera defensa de la teoría freguiana sería obra de E. E. C. JONES [8], autora que, según el decir de PAPST, "está muy influida por FREGE" [9]. En cualquier caso, JONES, en el artículo de 1910, muestra en múltiples ocasiones coincidencias entre la Teoría de los Juicios de FREGE y la suya propia. Sin embargo, nos parece que su defensa de FREGE no es muy válida, puesto que la coincidencia es, en verdad, mucho más pequeña de lo que JONES cree; de modo que la postura defendida no es, a menudo, la propiamente freguiana. Por ejemplo, cree que para ambas teorías es esencial que "S es (igual a) S" carezca de valor como ley del pensamiento o de la Lógica; sin embargo FREGE introduce esta ley en calidad de ley IIIe en los *Grundgesetze* (I § 50, p. 66, p. 240); de modo que cualquiera se inclinará a aceptar que en este punto JONES no ha diferenciado lo suficiente entre el *valor cognitivo* de una ley y su *necesidad* para la construcción

---

ha confundido signo, Sentido y Referencia o sólo signo y Referencia. CHURCH cree lo último: "Russell's reasons for rejecting Frege's notion of sense are, in the reviewer's opinión, without force. The point that some expressions, ei.g., the king of France in 1905, have a sense but no designatum simply does not constitute a difficulty, except in the sense of a complicating factor in the construction of a formalized language. And Russell's other objections, it would seem, are traceable merely to confusion between use and mention of expressions, of a sort wich Frege is careful to avoid by the employment of quotation-marks. Russell applies quotation-marks to distinguish the sense of an expression from its denotation, but leaves himself without any notation for the expression itself; upon introduction of (say) a second kind of quotation-marks to signalize names of expressions, Russell's objections to Frege completely vanish" (A. CHURCH, Recensión de la obra de CARNAP "*Introduction to Semantics*" en: The Philosophical Review 52 (1943) 298-304, cita pág. 302).

[8] E. E. Constance JONES: *Mr. Russell's Objections to Frege's Analysis of Propositions*. En: Mind, 19 (1910) 379-386.

[9] PAPST, op. cit. 28, con relación al artículo citado en la nota anterior. También es mencionado FREGE en E. E. C. JONES: *A New Law of Thought* (Proc. Arist. Soc. 11, 1911, 166-186). Sin embargo, a juzgar por el artículo de 1910, la coincidencia afecta, en todo caso, a ciertos aspectos de la doctrina de Sentido y Referencia, e incluso aquí se ha de andar con cuidado al hacer comparaciones, como se mostrará luego en el texto. Apenas se puede mantener la aserción de PAPST de que FREGE influye en JONES, puesto que las opiniones, que interesan a este respecto, de la autora inglesa se encuentran ya en una obra anterior: "*Elements of Logic as a Science of Propositions*", editada en Edimburgo en 1890, por lo tanto previamente a aquellos artículos de FREGE que contiene su segunda doctrina del juicio. Como apoyo puede servir la cita siguiente: "A significant Categorical proposition, a Proposition in which the Predicate adds something to the Subject, may be defined as, A Proposition which affirms (or negates) Identity of Denotation in Diversity of Determination" (op. cit. 46).

de una lógica. El hecho de que la especificación "No categorical of the form S is P is possible unless S and P have Denotation and Connotation (or Intension)" (383) también se encuentre en FREGE, no podrá negarse, pero sería dudoso que FREGE siguiera a su defensor también cuando continúa diciendo: "... identity of Denotation and diversity of Connotation" (ibíd. [10]). Han de hacerse reservas análogas en el caso de la aserción: "Every term which is used as Subject or Predicate in a Proposition must have both denotation and intension (as FREGE, I believe, holds)" (381), aun cuando sólo sea sobre la base de la manipulación freguiana de nombres propios sin Referencia. Sólo si el enunciado tiene un valor de verdad, es correcta la afirmación de JONES.

Queda en pie todavía otro problema que merece un poco de atención. Según PAPST, parece que ya RUSSELL ha criticado que "en FREGE era una contradictio in adjecto aceptar nombres propios no-referenciales, puesto que nombres propios son aquellos nombres que refieren algo" [11]. PAPST responde —considerando como ejemplo la expresión "las series convergentes más pequeñas"— que es "cierta la opinión de que aquí no hay ningún nombre propio correctamente formado, por consiguiente ningún nombre propio" (l. c. 25). Así se encuentra por primera vez en el camino de la solución correcta, que hay que buscarla en el hecho de que "nombres propios" con Sentido, pero sin Referencia ocurren (y deben ocurrir) en los lenguajes ordinarios de las ciencias y, ante todo, en los lenguajes naturales, pero no en lenguajes ideales como la conceptografía freguiana. Por ello, "nombre propio" en la conceptografía significa algo distinto de lo que significa en los lenguajes ordinarios. Mientras que FREGE tiene en cuenta el segundo caso, evidentemente, en especificaciones como:

> "El nombre propio debe, cuando menos, tener un sentido (de acuerdo con el uso que yo hago de esta palabra); en caso contrario sería una serie vacía de sonidos y se le llamaría nombre incorrectamente" (ASB),

otras especificaciones se refieren sólo a la construcción de la conceptografía y no al análisis del lenguaje. No siempre es posible llevar a cabo esta distinción con claridad, como en la aserción

> "Nombres sin Referencia no deben ocurrir en la conceptografía" (Gg I 9 n 3) [12]

---

[10] Efectivamente, según JONES, FREGE es de la opinión de que cualquier enunciado afirmativo "S es P" asevera la identidad de S y P, siendo simultáneamente diferentes los Sentidos. En esta interpretación se hacen reservas en cuanto que el concepto de la Referencia en JONES no parece coincidir con el freguiano; cf. la ecuación de "denotation or application or applicability", l.c. 382.

[11] PAPST 25, sin fuente de referencia. No hemos podido encontrar el lugar, en el que RUSSELL ha hecho esta objeción. El problema vaga en torno a la introducción del término "nombre propio" también para F. v. KUTSCHERA, *Die Antinomien der Logik. Semantische Untersuchungen* (Escrito de Habilitación en Munich) Freiburg/Munich 1964.

[12] Ejemplo: "Por lo tanto, yo denomino *nombre propio o nombre* de un objeto un signo que debe designar un objeto" (Gg I 43). A la concepción de los "Grund-

Si se atiende en cada caso si FREGE se refiere al análisis del lenguaje o a la construcción de la conceptografía, pueden eliminarse fácilmente las contradicciones que se han querido ver en este punto [13].

Podría pensarse que, con las limitaciones que hemos señalado, queremos negar todo valor a las explicaciones de JONES. Pero este parecer es erróneo; pues, el artículo nos parece que contiene interesantes pensamientos y observaciones buenas. Así, JONES (en la cita de la pág. 381, criticada arriba desde otro punto de vista) ha entendido correctamente que en la teoría de FREGE no sólo los sujetos, sino también los predicados deben tener un Sentido y no sólo una Referencia. Esto es correcto, aunque FREGE no haya explicado nunca este punto de modo terminante en sus escritos publicados; de modo que posiblemente ha sido JONES el primero en darse perfecta cuenta de este hecho. También la teoría freguiana de la "dación" de la Referencia por el Sentido se encuentra felizmente explicada: "Until I know what the phrase the first book on the shelf connotes (means), I cannot use that phrase as *denoting* the book referred to" (385). Todavía hay en este poco conocido artículo una serie de observaciones en las que puede verse respuestas directas a muchas objeciones de última hora. Cuando en la página 386 dice:

> "Is it not indispensable to have some analysis of propositions of the forms S is P which can be applied to *all* propositions of that forms, and some theory of denotation which can be applied to *all* denotative forms, at whatever stage of investigations or certainty?",

podríamos creer incluso que JONES, con esta cuestión, ha estado a un paso de la comprensión de los motivos decisivos de la Semántica de FREGE: la *unificación* de la teoría de Sentido y Referencia.

También el trabajo de BIERICH sobre "Freges Lehre von dem Sinn und der Bedeutung der Urteile und Russells Kritik an dieser Lehre" [14] trata de las objeciones de RUSSELL a la Semántica de FREGE de las proposiciones. También esta investigación considera argumentos principales las tres objeciones siguientes de RUSSELL:

(1) La relación de una proposición con lo Verdadero es distinta de la relación de una descripción con el objeto descrito por ella:

(2) El mismo FREGE consideró carente de sentido —según una nota de "Func-

---

gesetze" sólo corresponde la interpretación del "debe" en el sentido de que todo nombre propio es *establecido* como nombre de un objeto, ya conocido como existente ("deber convencional"). Esta interpretación es también la nuestra, la cual, sin embargo, no rebate, a partir del contexto, la otra interpretación, según la cual el "debe" expresa que un nombre propio *quiere comunicar* un objeto ("deber intencional").

[13] El que FREGE designe "sin Sentido" la expresión "La fracción propia mayor" (Gl 88 n), *no* contradice nuestra interpretación. Véase la carta del 24.5.91, remitida por FREGE a HUSSERL, donde dice: "En los Grundlagen yo no había hecho todavía la distinción entre Sentido y Referencia. En § 97, diría ahora "referencial" en lugar de "con Sentido". También, p. ej., en § 100, 101, 102 sustituiría a menudo ahora 'Sentido' por 'Referencia'".

[14] Phil. Diss. Hamburgo 1951.

tion und Begriff"— la suposición de las proposiciones como nombres de los valores de verdad;

(3) La aserción de FREGE de que las proposiciones que contengan nombres no-referenciales no son ni verdaderas ni falsas, es inexacta.

Tras haber formulado estas tesis, nos interesa considerar ahora la opinión de BIERICH sobre ellas, que en los tres casos difiere de la nuestra.

BIERICH considera esencial, para el tratamiento de la *primera* objeción russelliana que en FREGE la Referencia "no le corresponde al signo directamente, sino por mediación del Sentido del signo" (67). Por tanto, se podría establecer una escisión entre la relación Proposición: Valor de Verdad y la relación Descripción: Objeto, y comparar ante todo la relación entre proposición y Sentido proposicional con la existente entre descripción y Sentido descripcional; sólo entonces se seguiría la comparación entre la relación de Sentido proposicional y Referencia proposicional y la de Sentido descripcional y Referencia descripcional [15].

Aunque se pudiera demostrar que "una proposición se relaciona con el Pensamiento expresado por ella de manera distinta a como se relaciona una descripción con la determinación expresada por ella" (68), sería necesario que "también fuera diferente la relación compuesta de esta relación y de la relación del Pensamiento con su valor de verdad de la relación compuesta de la relación de una descripción con la determinación expresada por ella" (68). Puesto que BIERICH no sólo piensa que FREGE "no ha mostrado la identidad de la relación de un juicio con su valor de verdad y de la relación de una descripción con lo descrito por ella" (67), sino que también opina que la relación de una proposición con su Sentido ("según supuesto propio de FREGE"), no es, de hecho, una pura relación de expresión, entonces el argumento acabado de desarrollar es riguroso y, con ello, la primera objeción de RUSSELL parece justificada.

La opinión de BIERICH sobre la *segunda* tesis russelliana se apoya en un examen riguroso del uso freguiano del trazo de juicio, con el resultado de que, de hecho, el trazo de juicio "no se conecta con una propo-

---

[15] Somos del parecer de que BIERICH, en virtud de sus supuestos, no estaba obligado a introducir, de la forma citada, su prueba de la legitimidad de la objeción de RUSSELL. Puesto que, según la interpretación que BIERICH da de FREGE, una proposición aseverativa no designa, sino que asevera (o no *sólo* designa, sino que *también* asevera), por este motivo la relación entre proposición y valor veritativo ya sería distinta de la existente entre descripción y Referencia descripcional En este caso no sólo la relación entre proposición y Pensamiento no es una relación pura de *expresión*, sino que tampoco la existente entre proposición y valor veritativo es una relación pura de *designación*. Puesto que en este argumento ni se usa ni se presupone el concepto del Sentido, la mediatización de la Referencia por el Sentido puede ser esencial sólo para la forma especial del argumento de BIERICH. Pero no reconocemos los supuestos de BIERICH de ambos argumentos. valiendo lo mismo naturalmente para el resultado del procedimiento de prueba acabado de bosquejar.

sición para formar una expresión nueva y unificada" (71). Evidentemente, esto tiene su punto de apoyo en la interpretación de RUSSELL de una nota de "Function und Begriff" (FuB 22 n.); por ello, es sorprendente que BIERICH no encuentre justificada la segunda objeción de RUSSELL. Es "ciertamente posible interpretar esta aserción (sc. FuB 22 n.) como si FREGE hubiera pensado en una restricción o revocación del supuesto de que las proposiciones aseverativas sean nombres de los valores de verdad. Pero no se puede interpretar esta aserción como si con ella hubiera logrado una restricción o revocación tal. Por consiguiente, la segunda objeción de RUSSELL no está justificada" (71).

Otro carácter reviste su opinión sobre la *tercera* objeción russelliana. El punto de vista de FREGE de que las proposiciones no tienen Referencia (i.e. valor de verdad), si contienen un nombre no-referencial, se basa, según BIERICH, en los dos presupuestos siguientes:

a) Pensamientos, que contengan una parte nominal sin Referencia, no son ni verdaderos ni falsos;

b) Proposiciones, que expresen un Pensamiento que no sea ni verdadero ni falso, no son ni verdaderas ni falsas.

El primer juicio de BIERICH dice: "El supuesto b) es incompatible con el supuesto de FREGE de que las proposiciones aseverativas son reconocimientos de la verdad del Pensamiento o, de acuerdo con el uso lingüístico de la palabra 'Pensamiento', indicaciones del reconocimiento de la verdad del Pensamiento" (76). El segundo paso es, entonces, sencillo: si "un Pensamiento, que contenga un componente nominal sin Referencia, no es ni verdadero ni falso, entonces una proposición que exprese un Pensamiento como Pensamiento verdadero —y esto lo hace toda proposición, siempre que interpretemos, siguiendo a FREGE, la negación como señal de la materia del juicio— debe ser falsa exactamente por esto mismo" (76). Puesto que RUSSELL había afirmado la falsedad de estas proposiciones, BIERICH considera también justificada la tercera objeción de RUSSELL.

Vamos a responder ahora a la primera de las tres objeciones que en el curso de este capítulo hemos formulado de nuevo (págs. 113, 114 y 115) y que decía que la relación de una proposición con lo Verdadero o con lo Falso es distinta de la de una descripción con lo designado mediante ella. BIERICH y RUSSELL basan su argumentación en una observación hecha de pasada por FREGE sobre el hecho de que una expresión de la forma "⊢ A" (siendo "A" una proposición referencial) sólo asevera algo, no designando nada. Puesto que una proposición aseverativa no (o no sólo) designa su Referencia, sino que también asevera algo, debe de encontrarse con su Referencia en una relación distinta a la de una descripción con lo que designa. BIERICH obtiene esta conclusión a partir del enunciado sutil de que la relación entre una proposición aseverativa y el *Pensamiento* anejo no es una pura relación de *Expresión*, ya que la proposición aseverativa no sólo expresa el Pensamiento, sino que, ade-

más, lo presenta como verdadero. Pero un examen más riguroso de la doctrina freguiana de la aserción [16] nos va a mostrar que este argumento encierra una equivocidad —probablemente, ya presente en FREGE— en el uso del término "proposición aseverativa" ("asserted proposition"), eliminada la cual pierde su valor la objeción en cuestión.

No podrá decirse nada claro sobre la doctrina freguiana de la aserción hasta tanto no se establezca un requisito que nos ayude a solucionar el problema del concepto de los nombres propios: el requisito de distinguir rigurosamente entre enunciados sobre lenguajes naturales y enunciados sobre la conceptografía. En los lenguajes naturales [17] las proposiciones aseverativas se diferencian de otras proposiciones, por ejemplo interrogativas o imperativas, por su forma específica. Pero esta forma es usada al mismo tiempo para la expresión de "simples supuestos"; por tanto, de proposiciones no aseveradas. El tipo de uso de que se trate deberá inferirse, en cualquier caso, del contexto. Ahora bien, en la conceptografía de FREGE esta inseguridad desaparece en cuanto que la aserción es distinguida de la simple expresión del Pensamiento y señalada mediante un signo peculiar: el signo aseverativo "⊢". Una vez hecha esta estipulación para las proposiciones de la conceptografía, en una proposición aseverativa "⊢ A" el "A" sirve tan sólo para la expresión del Pensamiento, siendo su forma totalmente irrelevante. Sobre esto último no nos debemos dejar engañar por el hecho de que en todos los *ejemplos,* tomados de los lenguajes naturales, la proposición introducida en "A" aparezca forzosamente en la forma de proposición aseverativa. Si ampliásemos la conceptografía hasta incluir proposiciones interrogativas, una proposición "A" podría aparecer sin variación alguna en la interrogación "A"? (o "¿A") en lugar de en la aserción "⊢ A".

Vamos a prestar ahora una mayor atención al reproche, mencionado

---

[16] En vano se busca en la literatura secundaria un tratamiento de esta doctrina, que sea profundo o, por lo menos, sólido. El que las explicaciones de FREGE en torno a esta cuestión sean fácilmente mal interpretadas, como hay que confesar, no justifica las exposiciones que se han hecho, a menudo superficiales y la mayoría erróneas. Incluso el ponerse de acuerdo en el uso de la expresión "aserción", que es imprescindible en el marco de una crítica, falta ocasionalmente. En LINKE se alza contra la interpretación de que la aserción es una manifestación de un juicio, la objeción siguiente: "El uso lingüístico (!), totalmente unívoco en este punto, conoce también aserciones en las que lo aseverado no es considerado verdadero en modo alguno; dicho de otro modo, conoce aserciones, que se efectúan sin y, a menudo, contra la convicción de lo aseverado. Toda mentira lo demuestra" (P. F. LINKE, *Was ist Logik*? En: Wissenschaftliche Zeitschrift der Friedrich-Schiller-Universität Jena, 3 (1953/54), Gesellschafts-und sprachwissenschaftliche Reihe, Cuaderno 2/3, págs. 179-190, aquí 184). Pero con ello no se ha dicho más que el uso lingüístico cotidiano entiende por aseverar un modo de comportarse, que no está orientado a la verdad o la falsedad de lo aseverado. Pero esto no refuta el uso de FREGE, discrepante del citado, según el cual una proposición falsa no puede ser aseverada: "Puesto que es falsa, no puede ...ser expresada con poder aseverador" (Vern 148). Véase *Geom* IV 400: "A aquel que no se deja engañar por palabras, sino que quiere ir de la cosa a su fundamento, a nada puede decidirle el uso lingüístico. Siempre se plantea de nuevo la cuestión: ¿Está adecuado a la cosa el uso lingüístico?".

[17] Nos limitamos, sin prejuzgar la validez o invalidez de nuestras explicaciones para otras lenguas, al alemán, analizado solamente por FREGE.

arriba, de que el uso freguiano del trazo de juicio conduce a la introducción de factores psicológicos en la Lógica. Ciertamente, el trazo de juicio no comunica nada *sobre* aserciones; el trazo de juicio no dice nada sobre actos psíquicos, que tengan por contenido el Pensamiento expresado en la proposición subsiguiente, sino que señala al lector que el autor asevera ("con ello") lo que sigue. Asimismo, una pregunta no sirve para comunicar al interrogado que el interrogador hubiera deseado saber esto o aquello; sino que, mediante la pregunta, se le pide al interrogado que juzgue los Pensamientos contenidos en la pregunta[18]. Pero tampoco podemos librarnos del trazo de juicio en la función así explicada, pues únicamente él es el portador del "poder aseverativo", que en el lenguaje se le adscribe a la forma de la proposición. La inseguridad que sigue quedando sobre si una proposición aseverativa asevera realmente en un contexto dado, desaparece en la conceptografía debido a que "⊢ A" ciertamente asevera, no pudiendo ser interpretada, a su vez, como simple expresión del Pensamiento[19].

En esta interpretación "⊢" no es propiamente un signo del metalenguaje, siempre que se le asigne la presentación de relaciones de consecuencia, de inderivabilidad y otras sin mirar por el lector. "⊢ A" comunica al lector que el autor asevera "A" como verdadero, así como

"A"
×
B

comunica al lector que el autor ahora (en este lugar) pasa de la proposición "A" a la proposición "B" mediante el uso de una contraposición. En general, todos los conectores de la conceptografía pueden ser interpretados de este modo, lo que quizá se encuentra más cerca de su interpretación como reglas que de su interpretación como leyes metalógicas en una esfera de validez suprarreal. Sin embargo ni excluye esta última interpretación ni coincide con la primera. Puesto que el trazo de juicio no pertenece a la Lógica, sino a su exposición, no pueden introducirse por su causa "factores psicológicos" en la Lógica misma. Pero en la exposición de la Lógica apenas podría evitarse la ocurrencia de componentes pragmáticos tales (preferimos llamarlos así en lugar de "psicológicos"), pues toda exposición —incluso toda exposición platónica— re-

---

[18] Se entiende que aquí se habla solo de proposiciones interrogativas completas.

[19] Una serie de signos "⊢ (⊢ A)" no estaría correctamente formada. Ciertamente, esta solución tampoco proporciona una seguridad extrema. Podíamos imaginar que WITTGENSTEIN, en este lugar, habría objetado: "Pero, en una pieza dramática ¿no puede *escribir* alguien *en una pizarra* '⊢ A'?", y ¿no carecería "⊢ A" de poder aseverativo aquí? Una respuesta a estas cuestiones podría ser que "⊢ A" se encuentra aquí en un contexto similar al de las expresiones en estilo indirecto (p. ej., citado). Con todo se tendría que investigar más de cerca la situación descrita, aun cuando la objeción misma produzca la impresión de ser bastante sofística.

quiere ciertos signos o señales de comunicación entre autor y lector, para ser realmente exposición.

Tras esta clarificación de la tarea del trazo de juicio es fácil hacer una interpretación correcta de la observación freguiana: "'⊢ 2+3=5' no designa nada, sino que asevera algo" (FuB 22 n.). Con estas palabras lo que quiere decir FREGE es que la *tarea* ("función") de la serie de signos "⊢ 2+3=5" no es designar, sino aseverar; no es su función designar lo Verdadero, sino aseverar la veracidad del Pensamiento expresado mediante "2+3=5". Pero no quiere decir esto que en "⊢ 2+3=5" la parte expresional "2+3=5" haya perdido su carácter de nombre de un valor de verdad. Así como en la proposición la parte proposicional contribuye con su Sentido a la expresión del Pensamiento (y quizá con su Referencia a la designación del valor de verdad, cf. SuB 35 s.), así en la combinación "⊢ A" el "A" contribuye a la *aserción*: puesto que no se puede aseverar, sin aseverar *algo*.

Así quedaría aclarado que una proposición, que exprese un Pensamiento completo —dejando aparte si está o no aseverado—, sea también un nombre de un valor de verdad, sólo si todo nombre propio, que ocurra en la proposición, tiene una Referencia. Así, cuando BIERICH en su argumentación establece: "Una proposición aseverativa es para FREGE una expresión del reconocimiento de la verdad de un Pensamiento y no la simple expresión de un Pensamiento" (59), reproduce la opinión de FREGE de manera correcta sólo aparentemente. Puesto que el concepto de BIERICH de proposición aseverativa no permite separar forma gramatical y momento de aserción —en ninguna parte se dice si lo que BIERICH llama "proposición aseverativa" contiene o no propiamente el momento de aserción—, la argumentación de BIERICH aparece en último término como un intento de apreciar el valor de la precisión proporcionada por el análisis lógico con medios cuya falta de precisión proporciona, precisamente, la ocasión para este análisis. Esta confusión se hará muy clara cuando BIERICH escriba: "al asumir FREGE que los supuestos son proposiciones, las supone como proposiciones aseverativas, puesto que el momento de aserción está contenido en la forma que hace proposición a la proposición" (70), juicio ya refutado por una observación freguiana, contenida en el artículo "Der Gedanke", que dice así: "Incluso en los casos en que una proposición presenta la forma de proposición aseverativa, hay que preguntar si contiene o no realmente una aserción" (Ged 63)[20].

Creemos haber demostrado de este modo la infundamentación de la primera objeción de BIERICH y RUSSELL; al mismo tiempo, sería posible mostrar la carencia de objeto de la segunda objeción de RUSSELL, que

---

[20] En esta interpretación, hemos hecho un uso amplio de la terminología de FREGE. Por el contrario, para una exposición independiente de las cuestiones tratadas, sería más interesante prescindir de la expresión "proposición aseverativa", que es fácilmente malinterpretada, y usar una forma de *proposición enunciativa* frente a la forma de la proposición interrogativa, imperativa etc., con la condición adicional, de que sólo las proposiciones enunciativas puedan ser aseveradas. Si una proposición enunciativa es aseverada o no, es algo que se inferirá del contexto.

se apoya en una mala interpretación de una nota de "Function und Begriff" (FuB 22 n.). Podemos considerar con seguridad que FREGE no sólo no ha limitado o revocado totalmente su Semántica de las proposiciones, sino que tampoco ha tenido en ocasión alguna tal intención.

Por consiguiente, queda sólo por tratar la tercera objeción de RUSSELL-BIERICH sobre el hecho de que la ocurrencia de un nombre no-referencial en una proposición no la hace carente de Referencia, sino falsa. Lo que esta decisión implique, se verá claramente en una consecuencia obtenida por BIERICH. A saber, si el punto de vista, representado por RUSSELL y BIERICH, es correcto, entonces la Referencia de una proposición puede también no ser idéntica a su valor de verdad, pues "el valor de verdad de una proposición no cumple la condición de faltar, cuando uno de los nómina, que ocurran en la proposición, carezca de Referencia. Por consiguiente, no es una función de las Referencias de los nómina que ocurren en la proposición y no puede ser, entonces, una Referencia proposicional en el sentido freguiano" (Bierich 77). Al mismo tiempo, habría sido afianzada de esta manera la primera objeción, pues, si los valores de verdad no son Referencias proposicionales, entonces las proposiciones no son, naturalmente, nombres de los valores de verdad.

A la hora de responder hemos de distinguir entre la argumentación de BIERICH y la de RUSSELL. La primera presupone —de acuerdo con FREGE— que un Pensamiento, que contenga una parte nominal carente de Referencia, no es ni verdadero ni falso. De donde se deduciría que una proposición aseverativa que expresase un Pensamiento que no fuese ni verdadero ni falso, debería ser falsa, puesto que toda proposición aseverativa no sólo expresa el Pensamiento, sino que lo establece con el carácter de verdadero. Nuestras explicaciones precedentes sobre la doctrina de FREGE de la Aserción han refutado este argumento, pues se mostró que, según esta doctrina, una proposición *debe* ser aseverada, sólo si consta que designa lo Verdadero, pero esto puede (y debe poder) hacerlo sin el poder aseverativo, para el que la forma de la proposición aseverativa representa, ciertamente, un criterio necesario, aunque no suficiente.

Podemos considerar liquidado así el argumento de BIERICH y dedicarnos a la forma russelliana de la objeción, en la que no se trata de proposiciones con nombres propios cualesquiera no-referenciales, sino de aquellas que contienen *descripciones* no-referenciales. La decisión, que hay que tomar aquí, se encuentra, por lo tanto, entre el análisis de las descripciones de FREGE y el de RUSSELL. FREGE había exigido de un lenguaje perfecto (lenguaje ideal) que, en general, no contuviera proposiciones no-referenciales; por supuesto, el análisis de los lenguajes naturales, en los que de hecho ocurren proposiciones de este tipo, debe tomarlas en cuenta. Cuando analizábamos las proposiciones subordinadas en el capítulo anterior, caracterizábamos el punto de vista de FREGE diciendo que en él la aserción de proposiciones con descripciones en el

lugar del sujeto *presuponía* la existencia y univocidad de la Referencia de la descripción, pero que el Sentido de dichas proposiciones *no contenía* idea alguna de existencia o univocidad. Puesto que las cuestiones analítico-lingüísticas de este tipo sólo pueden solucionarse de manera definitiva en casos raros, deberemos elegir como criterio de decisión la eficacia de cada uno de ellos, en caso de que de los dos análisis no haya uno que sea "más natural" que el otro. En nuestro caso, GEACH ha proporcionado argumentos fuertes a favor de que la solución de RUSSELL no supera a la freguiana ni en uno ni en otro aspecto. Si la cuestión de que haya alguien actualmente que sea un rey de Francia no es afirmada, y la cuestión de si hay diferentes personas actualmente, cada una de las cuales es rey de Francia, es contestada negativamente, entonces no puede plantearse nunca una cuestión como "¿Es el actual rey de Francia sabio?". GEACH observa certeramente: "Un hombre normal, si fuere presionado a responder, replicaría muy probablemente: 'No sea necio, no hay rey de Francia'" [21].

La teoría de RUSSELL está libre de objeciones en lo que respecta a su tratamiento de descripciones en proposiciones existenciales y de proposiciones en las que ocurren descripciones en el lugar del predicado, pero falla en su tratamiento de proposiciones en las que ocurren descripciones en el lugar del sujeto. Puesto que, además, GEACH ha indicado numerosas dificultades que acontecen en el uso puramente "técnico" de la teoría de las descripciones russellianas, si hemos de decidirnos entre la teoría freguiana y la russelliana, preferiremos la solución de FREGE por ser la más natural y eficaz.

[21] "A plain man, if pressed for an answer, would be very likely to reply: Don't be silly, there isn't a King of France." P. T. GEACH: *Russell's Theory of Descriptions*. En: Analysis 10 (1950) 84-88; cita pág. 85.

2.3. SINONIMIA Y CONTEXTO PROPOSICIONAL

La problemática de este capítulo se caracteriza por la discusión de un criterio para la igualdad de Sentido de expresiones y por la cuestión de la "naturaleza" del Sentido de las expresiones mismas. En cierto modo, la primera de estas cuestiones está subordinada a la segunda; pues, si el Sentido de toda expresión de un lenguaje dado estuviera fijado y determinado unívocamente, entonces no podría haber duda alguna sobre la igualdad o desigualdad del Sentido de dos expresiones. Por tanto, sería inmediatamente evidente si dos expresiones son o no *sinónimas*, entendiendo aquí por tales las de igual Sentido (no simplemente las de igual Referencia). Pero no ocurre así, por lo menos, en los lenguajes naturales. Aún más, por lo que respecta al problema del Sentido de expresiones, la situación es tan poco alentadora que se está en la tentación de poner entre paréntesis la segunda de las cuestiones citadas y tratar independientemente la primera cuestión. De hecho esto es posible. Pues, así como los matemáticos están siempre de acuerdo en cuando dos expresiones designan el mismo número, sin estar de acuerdo en lo que "sea propiamente" un número y sin tener que plantearse, en general, esta cuestión, así también se puede pensar una situación en la que exista conformidad respecto del concepto de sinonimia entre los semánticos, aún cuando se pueda responder de maneras diferentes o poner entre paréntesis la cuestión de la "esencia" del Sentido.

Si se plantea sistemáticamente la cuestión del Sentido de las expresiones, entonces nadie se contentará con la división freguiana de los "nombres propios" en proposiciones y no-proposiciones, sino que entre los últimos tratará de separar los nombres propios en sentido estricto y las descripciones. Pues, mientras que la relación entre una descripción y la determinación expresada por ella puede ponerse paralelamente a la relación entre una proposición y el Pensamiento expresado por ella, sin embargo en el caso de nombres propios en sentido estricto, como "Aristóteles", se está en la disyuntiva de precisar o tan sólo de postular un Sentido junto a la Referencia.

Por ello, varios autores contemporáneos han negado expresamente un Sentido a los nombres propios, estrictamente dichos. Es casi seguro que esto no está de acuerdo con el punto de vista de FREGE. En primer lugar, un presupuesto fundamental de su semántica es que toda expresión, que tenga una Referencia, tiene también su Sentido. En segundo lugar, FREGE mismo ha hablado reiteradamente del Sentido de un nombre propio, estrictamente entendido (p. ej., "Odiseo" SuB 32 s; "Scilla" BP 370), si bien nunca ha determinado con precisión este Sentido de una manera que fuera comparable con la aserción de que el Sentido de una

proposición independiente es el Pensamiento expresado por ella. Por lo demás, FREGE choca con dificultades a la hora de describir con precisión el Sentido de un nombre propio, como "Aristóteles". Ha de admitir que diferentes usuarios del lenguaje natural pueden conectar un Sentido diferente con este nombre, por ejemplo "El alumno de Platón y maestro de Alejandro el Magno" frente a "El maestro de Alejandro el Magno, que nació en Stagira". Pero FREGE se muestra poco impresionado por esto. Explica que estas variaciones del Sentido son soportables y observa sólo brevemente que "no podrían ocurrir en un lenguaje perfecto" (SuB 27 n.). Hemos visto que su conceptografía cumple esta exigencia, puesto que en ella todo signo simple es introducido sólo una vez y por tal motivo toma su Sentido de una vez por todas. Pero en el artículo "Ueber Sinn und Bedeutung" se trata casi exclusivamente del análisis de los lenguajes naturales, y si FREGE en este contexto omite, lisamente hablando, la cuestión acabada de citar, puede suponerse que sólo más tarde atendió a la necesidad de un criterio de sinonimia y a la problemática planteada con ello. Cuando en 1892 dice todavía brevemente (si bien, tampoco concluyentemente):

> "El Sentido de un nombre propio es comprendido por todo aquél que conozca suficientemente la lengua o la totalidad de las designaciones, a la que aquél pertenezca" (Sub 27),

deberá aceptarse que FREGE ha considerado no problemática la decisión sobre la igualdad de Sentido o la diferencia de Sentido de dos expresiones, de acuerdo con la reflexión expuesta al principio.

Por este motivo no se realza tampoco el hecho, chocante para nosotros, de que en los ejemplos de FREGE sobre la igualdad o desigualdad del Sentido de nombres propios, que no sean proposiciones, se comparen siempre descripciones. Estas se diferencian de los nombres propios en sentido estricto en que no sólo designan algo, sino que también dicen algo y, por tanto, tienen un "Sentido": puesto que enuncian una propiedad (o varias propiedades, o relaciones) del objeto designado y, al mismo tiempo, manifiestan la unicidad del objeto respecto de estas propiedades o relaciones. En este sentido las expresiones "6 : 3" y "1+1" están en el mismo plano que las diferentes descripciones del baricentro de un triángulo, pues también éstas son descripciones, aunque disfrazadas [1].

Si se plantea la cuestión de cómo se fundamenta la diferencia de Sentido aseverada en estos casos de descripciones de igual Referencia, entonces o bien sólo se encuentra la alusión a una "diferencia en el modo de darse lo designado" (SuB 26), cosa que no nos hace avanzar, o bien se argumenta sobre la necesidad de un "acto cognitivo" peculiar:

---

[1] "6:3" es traducido por FREGE por "El número que multiplicado por 3 da 6" (FuB 5). El ejemplo del punto de intersección se encuentra en SuB 26 (véase pág. 93 ss. en este mismo trabajo).

"Siempre que la coincidencia de las Referencias no sea clara, tenemos una diferencia de Sentido. Así, el Sentido de '2^3+1' es diferente del Sentido de '3^2', aunque tienen la misma Referencia, porque se requiere un acto peculiar del conocimiento para darse cuenta de ello" (Frege a Russell, 28.12.02; de modo parecido BP 369).

Pero entonces no puede haber ningún caso en el que la comprensión de la existencia de una *igualdad de Sentido* requiera un acto peculiar de conocimiento. Por tanto, también encontramos aquí, aunque algo disimulada, la apelación, ya conocida por nosotros, a una comprensión preexistente de la lengua o a la familiaridad con el sistema de signos empleados. El que en los ejemplos pertinentes la sinonimia y la no-sinonimia se traten como algo evidente, fortalece nuestra sospecha de que FREGE ha visto la problemática, aquí totalmente oculta, sólo posteriormente —quizá, durante y con ocasión de la correspondencia con HUSSERL, en la que encontramos discutida esta cuestión.

Resumiendo, hemos de decir que faltan en FREGE enunciados utilizables sobre la sinonimia de expresiones singulares. Se puede intentar entonces la derivación de estos enunciados a partir de otras exposiciones de FREGE, por ejemplo mediante la reflexión siguiente. Supongamos que nos son dadas dos proposiciones, que difieren en una única parte proposicional —para simplificar, en el sujeto; y establézcase que estas proposiciones no forman ningún "contexto indirecto", por tanto ninguna proposición es del tipo "A dice que...", "A cree que..." y semejantes. Entonces se considerará que las palabras que ocupen el lugar del sujeto, llamémoslas "A" y "Δ", tienen el mismo Sentido, si las expresiones totales "Φ(A)" y "Φ(Δ)" son de igual Sentido. El mismo FREGE ha aceptado y usado una conclusión equivalente a ésta:

Si se... sustituye un signo 'A' por otro 'Δ' de la misma Referencia en una combinación de signos 'Φ(A)', que tiene una Referencia, entonces la nueva combinación de signos 'Φ(Δ)' referirá evidentemente lo mismo que la primitiva 'Φ(A)'. Pero si el Sentido de 'Δ' difiere del Sentido de 'A', entonces también diferirá en general el Sentido de 'Φ(Δ)' del Sentido de 'Φ(A)'" (BP 369-370).

Sólo así se llegaría a un criterio universal de la sinonimia de proposiciones: para decidir sobre la sinonimia de dos expresiones singulares, es necesario introducirlas primeramente en el contexto de una proposición apropiada (i.e. que satisfaga los supuestos arriba citados) y aplicar luego a las dos proposiciones resultantes el criterio. Y esta reducción parece ser bastante más que la simple reducción del método de decisión de la sinonimia. En el § 32 del primer volumen de los *Grundgesetze* se dice:

"Los nombres simples o, incluso, los compuestos, en los cuales consiste el nombre de un valor de verdad, contribuyen a expresar el Pensamiento, y esta contribución de la expresión singular es su *Sentido*" (Gg I 51).

En este mismo sentido y más expresivamente se dice en los *Grundlagen*:

"Es suficiente que la proposición, como un todo, tenga un Sentido; por este medio sus partes obtienen también un contenido" (Gl 71).

Con ello ¿no ha concedido FREGE la primacía a la proposición y al Sentido proposicional sobre la palabra y el Sentido de la palabra? ¿No podemos reducir entonces *todo* enunciado sobre el Sentido de las palabras a enunciados sobre el Sentido de proposiciones? Parece que también habla en favor de una respuesta afirmativa la máxima que FREGE establece como segundo Principio en sus *Grundlagen der Arithmetik*:

"debe preguntarse por el Significado de las palabras en el contexto proposicional, no en su aislamiento" (Gl x).

Por otra parte, se podría inferir directamente de esta especificación que no está planteada correctamente la *pregunta* por el Sentido de las expresiones y que, más bien, podría preguntarse sólo cuándo dos expresiones, introducidas en el mismo contexto proposicional, hacen la misma *contribución* al Sentido de esta proposición.

Puesto que parece que la especificación citada de FREGE hace innegable el hecho de que FREGE ha concedido al contexto proposicional una especial relevancia en nuestro problema, es necesario hacer aquí una advertencia antes de que se obtengan conclusiones precipitadas. Tal advertencia se apoyará, en particular, en un excursus por uno de los trabajos más recientes sobre la semántica de FREGE. En su trabajo sobre Sentido y Referencia[2], F. RIVETTI BARBÒ (inspirada aquí por GEYMONAT) sustenta una interpretación que concede una particular importancia al segundo principio de FREGE, puesto que la argumentación de FREGE para la distinción del Sentido y la Referencia de una palabra emplea esencialmente el presupuesto de que la palabra se puede introducir en el contexto de una proposición verdadera. Si entendemos bien a la autora, se trata de la reflexión de que FREGE ha de demostrar la identidad de Referencias que tienen dos expresiones, "a" y "b", distintas gráficamente y por su Sentido. El enunciado "a=b", cuya verdad ha de demostrarse a este respecto, cumple al mismo tiempo otra tarea (en la que ciertamente dicho enunciado debe poderse sustituir por cualquier otro enunciado verdadero sobre a y b): la tarea de garantizar primeramente una Referencia a las expresiones "a" y "b", puesto que nada más que un enunciado verdadero sobre a puede asegurar que "a" tiene una Referen-

[2] Francesca RIVETTI BARBÒ: *Il "Senso e Significato" di Frege: Ricerca Teoretica sul Senso e Designato delle Espressioni, e sui Valori di Verità*. En: Studi di filosofia e di storia della filosofia in onore di Francesco Olgiati. Milán 1962. (Publicazoni dell'Università Cattolica del Sacro Croce. Ser. III: Scienze filosofiche, 6.)

cia y no sólo un Sentido [3]. Sin embargo, FREGE no ha reconocido la necesidad del contexto de la proposición verdadera para la demostración de la diferencia de la Referencia y del Sentido de nombres [4]. Si no hubiese perdido de vista su principio del significado del contexto proposicional en la investigación del Sentido y de la Referencia, entonces habría llegado —según la autora— a un resultado totalmente distinto en muchos aspectos. Aquí no podemos entrar en la semántica —modificada de acuerdo con todo esto— que desarrolla RIVETTI BARBÒ en la segunda parte de su trabajo. Nos parece que la cuestión sobre la relevancia del contexto proposicional es merecedora de atención ante todo porque, en relación, con ella, son posibles malentendidos de la interpretación fundamental de FREGE. Por ejemplo, sería, sin duda, mal-entender a FREGE el aceptar que con su principio ha querido adherirse a la tesis de la primacía de la proposición sobre la palabra, tal como es representada por diferentes corrientes "totalistas" de la filosofía del lenguaje. Otro malentendido sería creer que el principio de FREGE legitima eo ipso la introducción de las llamadas definiciones de uso, lo que parece muy natural, si se supone que las palabras pueden obtener un Sentido simplemente al usarse en el contexto de ciertas proposiciones [5].

Ya hemos rechazado el segundo malentendido anteriormente (Capítulo 1.4), pero allí dejamos a deber una interpretación propia de las explicaciones freguianas sobre el contexto proposicional. Al querer llenar ahora este vacío, acentúese de antemano que aquí no se trata de criticar las dos tesis, ya rechazadas, en cuanto tales. Sólo se demostrará que

---

[3] Aquí se ve claramente que la autora interpreta la expresión "significado" en la formulación del principio como "Referencia" en el sentido de la segunda doctrina del juicio de FREGE, aunque es consciente de que "significado" es usado aquí de manera totalmente indiferenciada. En lo sucesivo, suponemos que se adecua a las intenciones de FREGE en los "Grundlagen" traducir la expresión en cuestión como "Sentido" en la terminología de la segunda doctrina del juicio. Esto tiene la ventaja de armonizar con el precepto posterior de FREGE de preguntar siempre por el Sentido de la proposición total. Así pues, que allí se habla de "Sentido" —en el sentido de la segunda doctrina del juicio—, y no de la Referencia proposicional (i.e. el valor veritativo), es tan claro, que apenas se requiere la confirmación indirecta de FREGE que se encuentra en su correspondencia con HUSSERL sobre el cambio de "Sentido" y, "Referencia". Por lo demás, el problema del contexto es el mismo, esencialmente, para el Sentido y para la Referencia, y en los sucesivo —también en la evaluación de la cita— prescindiremos de las diferencias, en orden a evitar exámenes paralelos, cosa que se hará allí donde no exista peligro.

[4] "Frege non ha rilevato, a quanto pare, l'indispensabilità del contesto della frase vera ai fine delle dimostrazione della differenza del 'significato' dal 'senso' dei nomi" (op. cit. 7).

[5] Véase a este respecto la refutación de este error de interpretación en M. DUMMETT: "*Nominalism*", en: Philosophical Review 65 (1956) 491-505. Pero DUMMETT se declara incapaz de rebatir la concepción de que FREGE ha renunciado posteriormente a su refutación de las definiciones de uso (definiciones de contexto). Pero, en virtud de las explicaciones de FREGE, contenidas en sus escritos posteriores inéditos, se puede mostrar que, efectivamente, FREGE no ha cambiado su parecer en este punto. Por ejemplo: "Por el hecho de que un signo se use en una o más proposiciones, cuyos demás elementos sean conocidos, no se le atribuye a este signo Sentido alguno" (LM 35).

estas tesis no encuentran ningún apoyo en FREGE, puesto que sus explicaciones sobre el contexto proposicional persiguen un objetivo totalmendistinto. Estas intenciones se pueden ya encontrar claramente en otros lugares de los *Grundlagen der Arithmetik,* puesto que FREGE ha comentado allí su segundo principio e, incluso, su aplicación. En general, las observaciones de FREGE sobre el contexto proposicional, contenidas en los *Grundlagen,* sólo se pueden entender si se ve con claridad que en ellas no se trata del Significado (Sentido) de cualquier palabra en el contexto proposicional, sino muy especialmente del Significado (Sentido) de *palabras numéricas.* Ciertamente este resultado aparecerá más tarde como aplicación del principio general al caso especial de las palabras numéricas:

"Sólo en el contexto de una proposición las palabras significan algo. Por lo tanto (!) se tratará de explicar el Sentido de una proposición en el que una palabra numérica ocurra" (Gl 73).

Pero posteriormente no se hablará ya de otras proposiciones, y, por tanto, puede suponerse que la única aplicación *que se intenta* es la relativa al caso de las palabras numéricas. Esto se verá incluso más claramente, si se tiene en cuenta lo que se quiso lograr mediante la introducción del segundo principio. Lo ha expresado claramente FREGE:

"Si se hace caso omiso del segundo principio, es casi necesario aceptar como significado de las palabras imágenes internas o hechos del espíritu, y contravenir con ello el primer (principio)" (Gl x).

Este primer principio, al que se alude aquí, decía:

"Hay que separar rigurosamente lo psicológico de lo lógico, lo subjetivo de lo objetivo" (ibíd.).

En último término también era el deseo de evitar el psicologismo el motivo de la introducción del segundo principio,

"mediante cuya observación... puede eludirse la interpretación fisicalista del número sin caer en lo psicológico" (Gl 116).

Finalmente, la intención de FREGE se muestra con toda claridad en la explicación siguiente, sacada también de los "Grundlagen":

"Por lo tanto, la irrepresentabilidad del contenido de una palabra no es motivo para negarle un Significado o excluirla del uso. La ilusión de lo contrario nace del hecho de observar las palabras aisladas y preguntar por su Significado, para el que aceptamos entonces una imagen. Parece así que una palabra que carezca de imagen interna que le corresponda, no tiene contenido. Pero debe siempre tomarse en cuenta una proposición completa. Sólo en ella las palabras tienen propiamente un Significado. Las imágenes internas, que además se nos presenten, no necesitan corresponder a los componentes lógicos del juicio" (Gl 71).

Dicho brevemente, el segundo principio de FREGE, en la averiguación del significado de una palabra, no requiere plantear la cuestión de las imágenes que el usuario de esta palabra conecta con ella, sino la cuestión del Sentido de las proposiciones en las que la palabra es usada.

Ahora bien, si evitar el psicologismo había sido el único motivo para introducir el segundo principio, siendo éste, por tanto, sólo un principio metodológico, entonces la cuestión del contexto proposicional hubiera podido marginarse, puesto que la segunda teoría del juicio se había distanciado rigurosamente de todo psicologismo en Lógica y había contrapuesto claramente el Sentido a toda imagen. Pero, si el problema del contexto no ha desaparecido todavía ahora, cuando menos este hecho es una alusión a que las cosas no son tan simples.

Para conseguir alguna luz debemos distinguir tres cuestiones totalmente diferentes que han obligado a FREGE a entrar en contacto con el contexto proposicional. Por primera vez alude a la cuestión del contexto en el *Begriffsschrift*. En el análisis de la proposición "Todo número total positivo se puede representar como suma de cuatro números cuadrados" se dice:

"La expresión 'todo número total positivo' no proporciona por sí sola una imagen independiente, a diferencia de la expresión 'el número 20', sino que sólo recibe un Sentido mediante el contexto de la proposición" (Bs 17).

Así como aquí la investigación de proposiciones cuantificadas, conduce a una consideración del contexto proposicional, así también conduce a ella la cuestión, ligada con la anterior, sobre la tarea de las llamadas letras universales en la expresión de leyes lógicas o matemáticas; pues, la serie de palabras "todo número total positivo" es un componente proposicional dependiente de otros y vacío de Sentido por sí sólo, en el mismo sentido que lo son los cuantificadores universales; éstos

"no designan números, conceptos, relaciones o cualesquiera otras funciones, sino que sólo indican la concesión de universalidad de contenido a las proposiciones en las que ocurren. Por lo tanto, sólo en el contexto de una proposición han de cumplir una cierta tarea: la de contribuir a la expresión del Pensamiento" (Geom III 307).

Con la misma situación nos encontramos en expresiones como "El número n":

"Esta expresión debe ser considerada en el contexto. Tomemos un ejemplo. 'Si el número n es par, entonces con $n\pi=1$'. Aquí sólo la totalidad tiene un Sentido, no teniéndolo por sí solos ni el antecedente ni el consecuente. No puede responderse la cuestión de si el número n es par, ni tampoco la de si cos $n\pi=1$. Para dar una respuesta de este tipo, 'n' debería ser un nombre propio de un número, que entonces debería estar necesariamente determinado. Aquí se presupone que, si se sustituye a n por el nombre propio de un número, tanto el antecedente como el consecuente obtienen un Sentido" (WiF 659).

La tercera cuestión, en cuyo tratamiento FREGE llega a hablar de la relevancia del contexto proposicional, es la que trata de la relación entre la conceptografía y los lenguajes naturales. Aquí se dice:

"A toda expresión, que pertenezca a una totalidad completa de signos, debe corresponderle un Sentido determinado; pero los lenguajes naturales no cumplen frecuentemente este requisito, y hay que contentarse con que en el mismo contexto la misma palabra tenga siempre el mismo Sentido" (SuB 27-28).

Por ejemplo, en la conceptografía el signo de un concepto debe

"tener un significado independientemente del contexto y no obtenerlo sólo en el contexto, lo que realmente sucede a menudo en las palabras de los lenguajes" (Df 6),

así es

"satisfecha esencialmente ...la tarea de nuestros lenguajes naturales, si los hombres, al relacionarse entre sí, asocian los mismos, o aproximadamente los mismos, Pensamientos con las mismas proposiciones. A este respecto no es necesario que las palabras aisladamente tengan por sí mismas un Sentido y una Referencia, con tal de que la totalidad tenga un Sentido. Otra es la situación, cuando se han de obtener conclusiones" (AP 55-56).

Aunque se tenga en cuenta la diversidad de cuestiones que condujeron a FREGE a la discusión del contexto proposicional y se preste atención al sentido diferente que reviste aquí el hablar de la importancia del contexto proposicional, quedan en pie motivos suficientes para sospechar que estas explicaciones de FREGE son incompatibles con el hecho de que en otros lugares considere que el Sentido de las partes proposicionales (o, por lo menos, de ciertas partes proposicionales) es constitutivo de la proposición. Sólo en este sentido se podrá explicar el que, en el artículo "Ueber Sinn und Bedeutung", FREGE comience su investigación suponiendo que no es problemático el Sentido de los nombres propios gramaticales y que, al pasar a proposiciones totales, considere natural la existencia de un Pensamiento (cf. SuB 32), cuyo status de Sentido o de Referencia intenta explicar mediante la clarificación de la influencia del Sentido y de la Referencia de una parte proposicional en el Sentido de la proposición, que la contenga. Así, por ejemplo, cuando FREGE escribe:

"Para el Sentido de la proposición sólo puede tomarse en cuenta el Sentido y no la Referencia de esta parte" (SuB 33),

presupone implícitamente lo que expresa explícitamente en otras partes, a saber, que el Sentido de la parte proposicional es *constitutivo* del Sentido de la proposición y que, por tanto, su influencia no es sólo posible, sino necesaria. Un ejemplo a este respecto lo proporcionan las siguientes observaciones sobre la proposición "El Etna es más alto que el Vesubio", tomadas de un artículo de 1914, publicado sólo extractadamente:

"Con esta proposición conectamos un Sentido, i. e. un Pensamiento; la entendemos; podemos traducirla a otras lenguas. Tenemos en esta proposición el nombre propio 'Etna', que contribuye al Sentido, i. e. al Pensamiento, de la proposición total. Esta contribución es una parte del Pensamiento, es el Sentido de la palabra 'Etna' ...Por lo tanto es esencial: primero, que el nombre 'Etna' tenga un *Sentido,* pues (!) en caso contrario la proposición tampoco tendría Sentido, i. e. no expresaría ningún Pensamiento; y segundo, que el nombre 'Etna' tenga una Referencia" (LM 40).

Esta especificación de que la proposición sobre el Etna no tiene ningún Sentido, si el nombre propio 'Etna' no tiene Sentido de por sí, ¿no entra en contradicción con el punto de vista sustentado hace un momento, según el cual la palabra "Etna" obtiene un Sentido por primera vez en el contexto proposicional? SCHWEITZER —al que conocemos como partidario de la segunda interpretación— en los lugares en que recurre a FREGE para defender la tesis del contexto, ha señalado diferencias de esta índole, que encuentra entre los *Grundlagen* y los *Grundgesetze* (op. cit. 99 n. 11). No es difícil encontrar ejemplos en favor de ello, puesto que en los *Grundlagen* es casi exagerada la relevancia que el contexto proposicional tiene para la palabra singular contenida en él, como ocurre en las dos proposiciones siguientes, citadas con satisfacción por los representantes de la tesis del contexto:

"Basta con que la proposición como un todo tenga Sentido; por este medio sus partes obtienen también un contenido" (Gl 71).

"La independiencia, que yo reclamo para el número, no significa que una palabra numérica designe algo fuera del contexto de una proposición" (Gl 72).

Pero parece que el último enunciado contradice precisamente un fragmento de los *Grundgesetze,* que se refiere en general a la Referencia de los nombres de cursos de valores y, especialmente, al de signos numéricos. Por ello, FREGE, después de haber expuesto las dificultades que surgen al concebir las clases como objetos propios en virtud de la antinomía russelliana, discute la posibilidad de concebir las clases como objetos "impropios". En cualquier caso, si se tuviera que rechazar esta posibilidad, argumenta él que sólo una cosa quedaría:

"observar los nombres de clases como nombres propios aparentes, que, por lo tanto, no tendrían en verdad ninguna Referencia. Por consiguiente se los tendría que considerar como partes de signos, que sólo como un todo tendrían una Referencia... Tampoco lo que estamos habituados a interpretar como signos numéricos sería propiamente un signo, sino la parte dependiente de un signo. Una explicación del signo "2" sería imposible; se tendría que explicar en su lugar muchos signos, que contuviesen como elemento dependiente "2", pero que lógicamente no habrían de pensarse como compuestos de "2" y de alguna otra parte" (Gg II 255).

Pero entonces

"sería inadmisible representar una parte tal mediante una letra; pues, en lo que concierne al contenido, no habría composición alguna. La universalidad de las proposiciones aritméticas se perdería con ello" (ibid.).

FREGE es, entonces, del parecer de que esto "basta para hacer aparecer como inviable este camino" (l. c.). Pero de aquí se sigue que, según FREGE, los signos numéricos y, en general, los nombres de cursos de valores deben ser interpretados como nombres independientes con Referencia independiente —lo que los partidarios de la tesis del contexto no sólo considerarán incompatible con la posición de los *Grundlagen*, sino también con explicaciones contenidas en los mismos *Grundgesetze*, como la siguiente:

"Sólo se puede preguntar por las Referencias en aquellos lugares en que los signos son elementos de proposiciones que expresan Pensamientos" (Gg II 105).

Ahora se propone la solución siguiente para estas contradicciones aparentes. La tesis del contexto está ampliamente justificada en lo que atañe a los lenguajes naturales; no lo está en la esfera de las expresiones referenciales de cualquier tipo y de cualquier fin de uso. Tan pronto como se efectúa una separación rigurosa entre los lenguajes naturales y la conceptografía, la situación descrita mediante la tesis del contexto no parece ser característica de las relaciones de Referencia y Expresión, sino una propiedad de algunos contextos del habla natural, que al lógico sólo le parece una imperfección y que, por ello, debe ser evitada siempre, al construir lenguajes artificiales. Anteriormente habíamos intentado hacer una separación precisa de las explicaciones freguianas sobre el contexto proposicional, y, por ello, habíamos distinguido entre los enunciados relacionados sólo con lenguajes naturales así como los enunciados que tratan de partes proposicionales dependientes y conectores. Para las restantes explicaciones se requiere, sin embargo, la interpretación que hemos desarrollado al discutir la teoría freguiana de la aserción, solución que no nos parece sólo menos extrema, sino también mucho más plausible que la tesis del contexto. Lo que en lugares precedentes se dijo, desde otro punto de vista, sobre la función de "designación" en las proposiciones, puede ser reformulado ahora desde el punto de vista de la tesis del contexto del modo siguiente. Hay que rechazar la interpretación, según la cual las palabras son equivalentes a elementos de una caja de construcciones, en cuanto que sólo en caso de necesidad son "extraídos" y agrupados en proposiciones, en cuyo caso a dichos elementos, que hasta entonces carecían de Sentido y de Referencia, mediante una especie de fuerza milagrosa les adviene un Sentido, que de nuevo se diluye en la nada, cuando la trabazón de la proposición se "deshace". Más bien, si prescindimos de la irrelevante función lógica de "etiquetar", las palabras tienen ya su Sentido siempre y exclusivamente *en relación* al contexto del habla y, por ello, *en relación* al contexto proposicional. Por consiguiente, es absurdo negarles este Sentido, cuando no se encuentran en el contexto de una proposición determinada, por ejemplo, cuando son objeto de una investigación filológica o semántica.

Mediante esta extensión y precisión del punto de vista sustentado en el capítulo 1.4 —según el cual las palabras no obtienen su Sentido y su

Referencia *mediante* el contexto, sino que los poseen de por sí—, la exigencia de FREGE en la conceptografía[6] alcanza su total inteligibilidad. Precisamente, porque tampoco aquí las palabras (signos) *obtienen* su Sentido por primera vez en el contexto proposicional, sino que ya lo *poseen* con anterioridad a su introducción en el contexto, este Sentido debe ser siempre el mismo y contribuir al Sentido de la proposición, como unívocamente determinado. En este interpretación, que aquí proponemos como una explicación racional, nos parece que no existe ninguna contradicción entre la designación del Sentido de la palabra como constituyente del Sentido de la proposición, y el principio, según el cual debe preguntarse por el Sentido y la Referencia de las palabras siempre en el contexto proposicional (!).

Nuestro excursus por el contexto proposicional (cuya prolijidad nos parece justificada por la relevancia evidente, que tienen las cuestiones tratadas en relación con la discusión actual de FREGE) establece al mismo tiempo con seguridad, que la cuestión acerca del Sentido de las palabras puede ser planteada independientemente de la cuestión acerca del Sentido de proposiciones totales. Asimismo resulta de aquí que también tenía pleno sentido la cuestión planteada al principio de nuestro excursus: la posibilidad de reducir el problema de la sinonimia de palabras a la sinonimia de proposiciones. Este paso se puede completar ahora sin riesgo de incurrir en errores, y en cuanto que consideramos que la reducción propuesta (pág. 128) constituye una solución, replanteamos ahora la cuestión de la sinonimia de proposiciones.

Sabemos que FREGE ha explicado el Sentido de proposiciones más rigurosamente que el Sentido de los nombres propios gramaticales o lógicos, al establecer que el Sentido de una proposición es el Pensamiento expresado por ella. Por supuesto, a partir de esta determinación no se sigue que el Pensamiento expresado por una proposición pueda ser comprendido tan claramente, que pueda decidirse de modo inmediato si dos proposiciones dadas expresan o no el mismo Pensamiento. Este hecho hubiera debido esperarse en virtud de la reflexión introductoria de este capítulo, como, por lo demás, también en virtud de la consideración de FREGE de que el Sentido de un nombre propio "es comprendido por todo aquél, que conozca la lengua o la totalidad de las designaciones. a la que aquél pertenezca" (SuB 27). Debería concluirse aquí que, si el Sentido de una palabra es entendido realmente por cualquier miembro de la comunidad lingüística en cuestión, desaparecería la cuestión total de la sinonimia: pues, si se puede establecer unívocamente el Sentido de toda expresión, entonces no pueda surgir duda alguna en torno a la igualdad de Sentidos de dos expresiones. Que no se pueda establecer de esta manera el Sentido de una expresión en la mayoría de las ocasiones, lo había de establecer FREGE posteriormente, al investigar la posibilidad

[6] y en toda precisión del lenguaje natural, pues, naturalmente, yo puedo someter a ciertas reglas libremente mi uso de él, sin proponerme hacer una formalización.

de definiciones, en la que no sólo el definiens compuesto, sino también el definiendum, introducido abreviacionalmente, tienen un Sentido en los lenguajes naturales, y la ecuación formal es al mismo tiempo la expresión adecuada de una igualdad de Sentido, existente ya en el lenguaje natural. Puede encenderse una disputa en torno a la cuestión de la adecuación:

"¿Cómo es posible —puede preguntarse— que sea dudoso, si un signo sencillo tiene el mismo Sentido que una expresión compuesta, si el Sentido de cualquier signo sencillo es conocido y también puede ser conocido el Sentido de esta expresión a partir de la composición? En efecto: si el Sentido de cualquier signo sencillo es comprendido realmente de modo claro, entonces no puede ser dudoso si coincide con el Sentido de la expresión. Si es dudoso que el Sentido de esta expresión pueda conocerse a partir de su composición, entonces el motivo deberá radicar en que el Sentido de cualquier signo sencillo no es comprendido claramente" (LM 30).

Nos hallamos en una situación muy similar en el caso del Sentido de proposiciones, de modo que necesitamos un criterio propio para la igualdad de Sentido de proposiciones, es decir, para la igualdad de Pensamientos. Que en FREGE no se encuentra jamás un criterio tal, es una crítica bastante frecuente en la literatura sobre dicho autor. SCHRÖTER, en 1943, observa acerca de esto: "Hasta hoy no se ha precisado cuándo dos enunciados tienen el mismo Sentido, por tanto, cuándo son iguales dos Pensamientos. Hay pocas esperanzas de que sea lograda una precisión de esta índole"[7]. CARNAP escribe en 1947: "In one respect, Frege's conception of proposition ('Gedanke') is not quite clear; he does not state an identity condition for propositions"[8]; con todo, CARNAP intentó hacer una precisión de la igualdad de Pensamiento freguiana, de la que hablaremos todavía. En su recensión del libro de CARNAP, SCHOLZ ha expresado tres desiderata sobre la semántica de FREGE, la tercera de las cuales dice: "La cuestión de cuándo dos nombres propios tienen el mismo Sentido, constituye un problema abierto también para los enunciados"[9].

De aquí, BIERICH toma la objeción: "El (i. e. FREGE) no toma, sin embargo, ninguna decisión, en los escritos que presentan su doctrina posterior, de cuándo dos juicios asertóricos tienen el mismo Sentido, i.e. de cuándo expresan el mismo Pensamiento. Pero hasta tanto no sepamos cuándo dos juicios expresan el mismo Pensamiento, no sabremos nada propiamente sobre los Pensamientos"[10].

Que FREGE en los escritos publicados no ha proporcionado ningún criterio para la igualdad de Sentido de proposiciones, debe aceptarse de

[7] Karl SCHROETER: *Was ist eine mathematische Theorie?* En: JDMV 53 (1943) 69-82 (79).

[8] R. CARNAP: *Meaning and Necessity. A Study in Semantics and Modal Logic.* Chicago 1947; 2.ª Ed. ibid. 1956 (124).

[9] H. SCHOLZ: *Recensión del MaN* (nota anterior). En: Zentralblatt für Mathematik 34 (1950) 1-3.

[10] M. BIERICH: *Freges Lehre von dem Sinn und der Bedeutung der Urteile und Russells Kritik an dieser Lehre.* Phil. Diss. Hamburgo 1951, pág. 2.

hecho. En virtud de la concepción de FREGE de las proposiciones como nombres propios, se puede equiparar *definicionalmente* un complejo de signos, interpretable como proposición, con una proposición conceptográfica [11], i. e. se puede "determinar que tiene el mismo Sentido (!) y la misma Referencia que un compuesto de signos conocidos" (Gg I 45). Pero de aquí no sacamos nada en vistas a la solución de la cuestión de la igualdad de Sentido; pues, que la ecuación definicional sea una ecuación del *Sentido* (y no sólo de la Referencia) del Definiendum y el Definiens, es algo trivial, puesto que en las proposiciones la condición más débil de la igualdad de Referencia enunciaría la simple coincidencia del valor veritativo, que es evidentemente inútil para las definiciones.

Mientras que en este caso de la *especificación* sencilla de la igualdad de Sentido es superfluo un criterio de la igualdad de Sentido de las proposiciones, en vano se aguardará la mención de un criterio para los casos no triviales. En cualquier caso esto vale de los escritos publicados de FREGE, de modo que lo mejor será inferir la concepción de FREGE sobre la sinonimia de proposiciones de otras explicaciones. Aquí se ofrece de hecho un punto de apoyo en la observación de FREGE de que ha distribuido en Pensamiento y valor veritativo en su segunda doctrina del juicio lo designado "anteriormente" como "contenido enjuiciable" [12]. Con esto parece señalarse un camino, pues a partir de las condiciones para la igualdad del contenido enjuiciable parece que se puede inferir una condición para la igualdad del Sentido proposicional: puesto que tanto la igualdad del Pensamiento como la igualdad del contenido enjuiciable implica la coincidencia del valor veritativo, se debería en general prescindir del valor veritativo; por decirlo así, sustraerlo y atribuir a las proposiciones el mismo Sentido si, y sólo si, tienen el mismo contenido enjuiciable.

Contra este procedimiento se alzan dos serias objeciones. Ciertas proposiciones, que evidentemente expresan el mismo Pensamiento, como

(1) "en Platea vencieron los griegos a los persas",
(2) "en Platea fueron los persas vencidos por los griegos",

tienen un contenido enjuiciable diferente en el *Begriffsschrift*. Por tanto, la igualdad del Sentido proposicional y la igualdad del contenido enjuiciable no son equivalentes. Una segunda objeción nace del hecho de que FREGE no ha proporcionado ningún criterio de igualdad para contenidos enjuiciables, sino sólo para contenidos conceptuales [13]. Aunque la cir-

[11] En el sentido de Gg I 44. Véase la definición en Gg I 556.
[12] Gg I x; BuG 198; cf. carta a HUSSERL del 24.5.91.
[13] Es trivial la especificación de BIERICH de que en FREGE "dos juicios, en los que las mismas expresiones ocurren en la misma secuencia, tienen también el mismo contenido enjuiciable" (op. cit. 26); naturalmente, FREGE no hace referencia a ello. Pero la formulación sirve en BIERICH evidentemente sólo para sugerir la igualdad de estructura de las proposiciones como condición necesaria de la igualdad del contenido enjuiciable. Pero, con seguridad, FREGE no quiso establecer una condición tan estricta. Por ello, no podemos seguir a BIERICH, cuando asevera: "Por lo tanto, dos juicios, en los que las mismas palabras ocurran en diferentes secuencias, o, en los que se encuentren diferentes palabras tienen siempre (!) di-

cunstancia, de que FREGE adscriba, por ejemplo, a las dos proposiciones (1) y (2) el mismo contenido conceptual, hubiera podido hacer evidente la trasposición de la conjetura de equivalencia citada a la igualdad de contenidos *conceptuales,* sin embargo el intento de llevarla a cabo sería concebido sólo en tiempos recientes —probablemente en vista de las contrainstancias, aparentemente irrefutables, del texto de FREGE. BIERICH, en 1951, tuvo la buena idea —a pesar de las apariencias y de la confirmación aparente de lo mismo en los *Grundegsetze* (Gg I, ix, x)—, de relacionar las palabras de FREGE sobre su punto de vista "anterior" no con el *Begriffsschrift,* sino con los *Grundlagen,* idea a la que se puede llegar en una lectura atenta del artículo "Ueber Begriff und Gegenstand" (cf. BuG 198). BIERICH logró demostrar que —a pesar de la amplia coincidencia de ambos escritos en la doctrina fundamental lógica— había una desviación *terminológica* en un punto. A saber, BIERICH pudo demostrar [14], que en los *Grundlagen* se entiende por un contenido *enjuiciable* siempre un contenido *conceptual* en el sentido del *Begriffsschrift.* Esta aserción aparece revestida de tal carácter de seguridad en las explicaciones de BIERICH, que no se le puede acusar de ser una solución ad hoc, cosa que debe resultar indispensable en el contexto de nuestra problemática [15]. De acuerdo con el descubrimiento hecho, BIERICH sustituyó en la reflexión acabada de bosquejar la expresión "contenido enjuiciable" por la expresión "contenido conceptual" e intentó relacionar los contenidos conceptuales del *Begriffsschrift* con la doctrina posterior de Sentido y Referencia. Renunciamos a reproducir esta comparación, que tiene por resultado el hecho de que dos proposiciones, según la segunda doctrina del juicio de FREGE, tienen el mismo Sentido si, y sólo si, tienen el mismo contenido conceptual, según la primera doctrina del juicio. Pero, para *este* caso FREGE había establecido ya un criterio en el *Begriffsschrift*: dos proposiciones S_1 y S_2 tienen el mismo contenido conceptual, si, y sólo si, de S_1 en conjunción con cualesquiera otras proposiciones T_1, ..., T_n se derivan las mismas consecuencias que de S_2 en conjunción con las mismas proposiciones T_1, ..., T_n. Esta igualdad del "conjunto de consecuencias" ha de considerarse, asimismo, como el criterio de la igualdad de Sentido de las proposiciones.

La extrapolación de BIERICH fue brillantemente confirmada, cuando BARTLETT, en 1961, publicó una extensa explicación de FREGE sobre la

---

ferentes contenidos enjuiciables" (l.c.). Esta objeción vale también contra P. D. WIENPAHL: *Frege's 'Sinn und Bedeutung'*, en: Mind 59 (1950) 483-494.

[14] BIERICH, op. cit. 3.er Capítulo, Apartado I (40 ss.), donde se sustituye la terminología híbrida "contenido enjuiciable conceptográfico" por el "contenido conceptográfico" de FREGE, puesto que en el "Begriffsschrift" de FREGE los contenidos conceptográficos son eo ipso enjuiciables.

[15] En el extracto reproducido del párrafo siguiente (pág. 141) de la carta a HUSSERL del 9.12.06, FREGE denomina Pensamiento al "contenido... (de una proposición), en tanto que es susceptible de ser juzgado como verdadero o falso" o "a lo que en el contenido es juzgable como verdadero o falso". La comparación con el criterio del "Begriffsschrift" muestra inmediatamente lo deseado.

igualdad de Pensamientos [16]. El texto procede de una carta remitida por FREGE a HUSSERL el 9-12-06, que como otros textos importantes de la obra póstuma científica de FREGE se conservó en Münster desde el año 1935 hasta su publicación. FREGE escribe:

"Me parece que es necesario un criterio objetivo para reconocer un Pensamiento como él mismo, puesto que sin dicho criterio no es posible hacer un análisis lógico. Ahora bien, para decidir si la proposición A expresa el mismo Pensamiento que la proposición B, me parece que es únicamente posible valerse del siguiente medio: suponer que ninguna de las proposiciones tiene un componente de Sentido lógicamente evidente. Así pues, si tanto el supuesto, de que el contenido de A es falso y el de B es verdadero, como el supuesto, de que el contenido de A es verdadero y el de B es falso, conducen a una contradicción lógica, sin que se requiera saber si el contenido de A o B es falso y sin usar nada más que leyes puramente lógicas, entonces al contenido de A —en cuanto es susceptible de ser juzgado como verdadero o falso— no puede pertenecer nada, que no pertenezca al contenido de B; pues no hay ninguna base para que exista un excedente tal en el contenido de B, y, según nuestro supuesto, dicho excedente no sería lógicamente evidente. Asímismo, según nuestro supuesto, al contenido de B —en cuanto es susceptible de ser juzgado como verdadero o falso— no puede pertenecer nada que no pertenezca tampoco al contenido de A. Por lo tanto, lo que en los contenidos de A o de B puede ser juzgado como verdadero o falso, coincide y yo lo denomino el Pensamiento expresado tanto por A como por B" (citado según BARTLETT l. c.).

Lo desusado en esta formulación es que FREGE no se contente con la negación sencilla de la ocurrencia común de $\neg$ A y B o de A y $\neg$ B, sino que establezca la exigencia más rigurosa ("intuicionista"), de que cada uno de estos supuestos conduzca a una contradicción lógica. Si se debilita esta exigencia, reduciéndola a la negación usual, entonces la concepción de FREGE debe interpretarse de modo parecido a como hace BARTLETT, que resume el texto de FREGE con las siguientes palabras:

"Dos proposiciones tienen el mismo Sentido, si son, ciertamente, equivalentes lógicamente y si ni ellas ni ninguna de sus partes están determinadas lógicamente. Esta última observación es importante en cuanto que sin ella podría ser aseverado, primero, que todas las proposiciones lógicamente verdaderas y todas las lógicamente falsas tendrían el mismo Sentido, y, segundo, que no habría entonces ningún Sentido, pues la adición de una proposición lógicamente determinada, de cualquier manera, a una proposición cualquiera no alteraría el Sentido de esta proposición, en cuanto que no alteraría su valor veritativo" (BARTLETT, op. cit., 20).

La alegría de encontrar un criterio, formulado por FREGE mismo, para la igualdad de Sentido de proposiciones se enturbia pronto por las dificultades que encontramos, cuando se someten a este criterio los ejemplos propios de FREGE, dados para la diferencia e igualdad de Sentido. Vamos a considerar unos cuantos casos de éstos.

Se sabe que, en la construcción de FREGE de la Aritmética, la ley conmutativa para los números naturales, "a+b=b+a", se demostró por medios puramente lógicos. Por ello, a partir de toda proposición "Φ(a+b)",

[16] BARTLETT, op. cit. 19-20.

independientemente de su verdad o falsedad, podrá derivarse la proposición "Φ(b+a)", sin usar nada más que leyes lógicas, y, por consiguiente, las proposiciones "Φ(a+b)" y "Φ(b+a)" deben ser sinónimas, según el criterio establecido. Para proposiciones y, en general, para cualesquiera conexiones de signos "Φ(Δ)" y "Φ(A)", con los componentes "Δ" y "A", FREGE ha hecho ahora la especificación siguiente:

"Si... el Sentido de 'Δ' difiere del Sentido de 'A', entonces, en general, también el Sentido de 'Φ(Δ)' diferirá del Sentido de 'Φ(A)'" (BP 370; similarmente, LM 31).

Según esto, el Sentido de la expresión "a+b" no puede ser diferente del Sentido de la expresión "b+a", puesto que, en caso contrario, también "Φ(a+b)" tendría un Sentido distinto del de "Φ(b+a)", en contra de nuestra especificación. Por tanto, si se toma como base el criterio de FREGE para la igualdad de Sentido de las proposiciones, entonces "a+b" y "b+a" son siempre sinónimas, y

"1+3" y "3+1",
"1+4" y "4+1",

así como todos las proposiciones construidas análogamente, tienen siempre el mismo Sentido.

Este resultado coincide plenamente con un resultado de BARTLETT, que se basa en otras exposiciones de FREGE y que, usando su concepción de la equivalencia lógica como un caso especial de la igualdad (esto es, como igualdad de valores veritativos), ha propuesto la generalización siguiente del criterio de sinonimia de FREGE:

"Si la expresión de una ley lógica es una ecuación general de tal tipo que ningún componente de esta expresión (en particular, las expresiones parciales situadas a la izquierda y a la derecha del signo de identidad) ni la negación del mismo es la expresión de una ley lógica, entonces toda expresión, que resulte de la sustitución apropiada de la expresión parcial situada a la izquierda del signo de identidad, ha de tener el mismo Sentido que toda expresión, que resulte de la misma sustitución de la expresión parcial situada a la derecha del signo de identidad" (BARTLETT, 21).

A este respecto puede observarse todavía que la limitación propuesta enfáticamente por BARTLETT

"de que aquí no se dice nada sobre la igualdad de Sentido de aquellos componentes que no sean nombres de objetos, pues los predicados son expresiones incompletas en el sistema de FREGE y, por ello, no pueden ocurrir aisladamente en un lugar argumental del signo de identidad" (ibid. 22),

necesita tener sólo un carácter provisional. Una consecuencia inmediata del concepto de sinonimia, desarrollado por BARTLETT, es la igualdad de Sentido, ya introducida, de "a+b" y "b+a" para cualesquiera números naturales a y b:

"Que 4+1=5, es, ciertamente, una verdad analítica, pero el Sentido de '4+1' es diferente del Sentido de '5'; por otra parte, vale también analíticamente que 4+1=1+4, pero, puesto que en general vale para todo a y b, que a+b=b+a, según nuestra especificación 4+1 (léase: '4+1', Th.) tendrá el mismo Sentido que '1+4' "(l.c. 33).

Aunque parece que la igualdad de Sentido de expresiones como "1+4" y "4+1" no corresponden perfectamente a nuestras "imágenes intuitivas" de la sinonimia, podríamos considerar el resultado obtenido como una clarificación de la concepción efectiva de FREGE, así como una propuesta discutible de la ampliación de este concepto de sinonimia, y contentarnos con lo dicho. Pero hay una explicación de FREGE que —aunque, según todas las apariencias, es la única en los escritos publicados de FREGE— tiene consecuencias importantes para la cuestión de la sinonimia aquí discutida. Esta explicación, evidentemente omitida por BARTLETT, dice:

"Así yo digo de las designaciones '3+1', '1+3', '2+2', '2·2', que tienen la misma *Referencia*, pero diferentes *Sentidos o expresan* cosas diferentes" (**BP 369**).

De aquí se desprende indiscutiblemente que FREGE considera que tienen *diferentes* Sentidos las expresiones '3+1' y '1+3' (y, por tanto, también '4+1' y '1+4'), en contra del resultado antes obtenido. Esto no significa sólo que el concepto de sinonimia, desarrollado por BARTLETT, no corresponde a las intenciones de FREGE (por lo menos en el tratado citado en último lugar), significa también que, si consideramos libre de objeciones la derivación de la sinonimia de "1+4" con "4+1", el criterio de sinonimia propio de FREGE conduce a resultados, que contradicen claramente otras explicaciones de FREGE. Entonces, esto significaría también que el texto, publicado por primera vez por BARTLETT, de la correspondencia de FREGE con HUSSERL debilita la sospecha de que FREGE ha considerado carente de importancia la cuestión de la igualdad de Sentido de proposiciones (véase a este respecto BARTLETT 19), pero que no demuestra que FREGE haya tenido clara la respuesta (no entendido esto, naturalmente, como descripción de un estado psíquico).

Por ello, para dar un juicio fundamentado del criterio de sinonimia freguiano, se requiere hacer una investigación más profunda. Vamos a verificar, en lo sucesivo, la eficacia del criterio mediante su aplicación a algunos ejemplos freguianos sobre la igualdad y diferencia de Sentido, pero además vamos a probar en estos mismos ejemplos otro concepto de sinonimia —comparándolo, en parte, con el criterio de FREGE. Hemos de introducir, en primer lugar, este nuevo concepto (se trata del concepto de CARNAP de Isomorfismo intensional).

CARNAP basa su profundo estudio sobre FREGE en *Meaning and Necessity* en la interpretación de la sinonimia de proposiciones como equivalencia lógica. Con todo, ha indicado al mismo tiempo la posibilidad de que FREGE mismo podría haber pensado una condición más fuerte para la igualdad de Pensamientos, quizá algo parecido a la relación de

"Isomorfismo intensional" (MaN 124). CARNAP dice que dos proposiciones son isomorfas intensionalmente, si los componentes de una están coordinados con los de la otra mediante la relación de igualdad intensional y si las proposiciones se obtienen a partir de estos componentes de manera rigurosamente igual, i. e. mediante un proceso de construcción completamente análogo. Se dice que dos proposiciones "tienen la misma estructura intensional", si son isomorfas intensionalmente, en el sentido expresado.

La relación de isomorfismo intensional es más fuerte que la de equivalencia lógica; pero es más débil que la igualdad de la estructura sintáctica de dos proposiciones, de la que es característica la ordenación o secuencia de los *signos* singulares, mientras que el momento decisivo para la estructura intensional es la secuencia de los pasos en la construcción de la expresión. Esto se ve claramente en el ejemplo siguiente. Sea un lenguaje artificial que contenga para el número 2, además del signo "2", el signo "II", para 3 y 5, además de "3" y "5", también "III" y "V" respectivamente, como functor suma, además de "$\xi+\zeta$", también "S(ξ, ζ)", y para la relación ser mayor que, además de "$\xi > \zeta$", también "Gr(ξ, ζ)". En este lenguaje "$5 > 3$" es isomorfo intensionalmente a "Gr(V, III)" y "$2+5 > 3$" es isomorfo intensionalmente a "Gr((S(II, V), III)". Por el contrario, "$7 > 3$" y "Gr (S(II, V), III)" no son isomorfos intensionalmente, porque los componentes "7" y "S(II, V)" no son isomorfos intensionalmente (véase MaN 56 s.).

Esta formación conceptual se puede extender al caso en el que las expresiones a comparar pertenezcan a diferentes lenguajes (en general, artificiales), de modo que, por ejemplo, "$p \longrightarrow q$" en la notación de HILBERT y "Cpq" en la llamada notación polaca aparezcan como isomorfos intensionalmente. Por supuesto, no podemos entrar aquí en detalles. Nos interesa la cuestión de si el concepto de estructura intensional es más apropiado para una precisión del concepto de Sentido freguiano que el concepto de equivalencia lógica [17]. En casos aislados esto se cumple con toda seguridad. Por ejemplo, las proposiciones, que difícilmente se designarán como de igual Sentido,

(1) "2 es un número primo par",
(2) "2 se encuentra entre 1 y 3"

son, ciertamente, equivalentes lógicamente y tienen, por tanto, la misma intensión; pero no tienen la misma estructura intensional. Podría parecer,

---

[17] Es interesante una comparación con la obra anterior de CARNAP, "*Der logische Aufbau der Welt*" (Leipzig 1928, repr. Hamburgo 1961): "Por el *Sentido* de un signo entendemos lo común a los objetos intencionales de aquellas imágenes, Pensamientos etc., la evolución del cual es el fin del signo; 7 y VII tienen el mismo Sentido, a saber, el número siete como contenido de imagen o de Pensamiento; 5+2 tiene otro Sentido... Asimismo 'la estrella vespertina' es lo mismo que 'the evening-star', pero 'la estrella matutina' es algo diferente" (61).

al observar estos ejemplos, que el concepto de estructura intensional proporciona una mejor explicación del "Sentido" de FREGE que el concepto de intensión. Sin embargo, podemos demostrar de manera relativamente fácil que tampoco esta explicación puede satisfacernos.

En primer lugar, está claro que la sustitución de "Sentido" por estructura intensional sólo es posible en lenguajes artificiales sin complicaciones. En aplicaciones a proposiciones del lenguaje natural se tendrá que incluir siempre un nivel de formalización, y es precisamente en este nivel donde se hace uso de las reglas de decisión, que pueden ser atacadas siempre, puesto que en los lenguajes naturales nunca son fijadas. Por lo demás, la misma complicación surge también en el criterio freguiano, cuando se intenta aplicarlo a proposiciones del lenguaje natural, por ejemplo a las proposiciones, arriba citadas,

(1) "Los griegos vencieron a los persas"
(2) "Los persas fueron vencidos por los griegos".

Sin ir más adelante, no podemos decir nada aquí ni sobre la estructura intensional ni sobre la equivalencia lógica. Pero para una formalización hay fundamentalmente dos posibilidades. En la primera, los predicados "vencer" y "ser vencidos" del lenguaje natural no son representados mediante dos constantes funcionales diferentes, sino que la "prescripción de trasposición" contiene de antemano la forma

$$\begin{aligned} &x \text{ venció a } y &&\Rightarrow B(x, y) \\ &x \text{ fue vencido por } y &&\Rightarrow B(y, x). \end{aligned}$$

Entonces, las dos proposiciones ejemplificadas pueden ser representadas por la misma proposición "B(x, y)" y desaparece la cuestión de la sinonimia (sea ésta la equivalencia lógica o la igualdad de estructura intensional). Está claro que este procedimiento no puede satisfacernos, pues la cuestión de la sinonimia, de esta forma, es desplazada sólo a otro lugar y la cuestión de la *legitimidad* de representar dos proposiciones determinadas por la misma proposición del cálculo queda sin respuesta. La segunda posibilidad, quizá más útil que la anterior, consiste en conservar la conversión de las relaciones citadas también en la formalización

$$\begin{aligned} &x \text{ venció a } y &&\Rightarrow B^{+}(x, y) \\ &x \text{ fue vencido por } y &&\Rightarrow B^{-}(x, y), \end{aligned}$$

completando esta "prescripción de trasposición" mediante una "prescripción *de Sentido*" adicional:

$$B^{+}(x, y) \Leftrightarrow B^{-}(y, x). \qquad \text{(S)}.$$

En la interpretación de la sinonimia como equivalencia lógica, esta

prescripción con "$\leftrightarrow$" en lugar de "$\Leftrightarrow$" se habría de introducir entonces entre las leyes lógicas, para que los supuestos "$B^+(G, P) \wedge \neg B^-(P, G)$" y "$\neg B^+(G, P) \wedge B^-(P, G)$" conduzcan a contradicción, como el criterio de sinonimia de FREGE exigía. Por supuesto, la contradicción no se obtiene ya de manera trivial, sino sólo en virtud de la prescripción adicional (S), de modo que la exigencia, contenida en el criterio freguiano, de hacer uso de leyes puramente lógicas, es violada. Por el contrario, si se interpreta la sinonimia como isomorfismo intensional, entonces se ha de interpretar inmediatamente (S) como expresión de una igualdad, de modo similar a como en el sistema de signos de CARNAP expuesto se había de establecer, por ejemplo,

$$\text{"}\xi > \zeta \Leftrightarrow \mathrm{Gr}(\xi, \zeta)\text{"}$$

o

$$\text{"3} \Leftrightarrow \mathrm{III}\text{"}.$$

Evidentemente (S) explicita precisamente aquel supuesto que, en la primera posibilidad, estaba contenido ocultamente en la prescripción de trasposición. Pero la regla no proporciona nada más que esto —en particular, su propia inserción está tan poco justificada como en el primer caso lo estuvo la de la prescripción de trasposición. Pero, por otra parte, tampoco es posible ver dónde se podría encontrar una justificación tal, si no fuera a partir de la comprensión del lenguaje que se ha de trasponer (formalizar), comprensión presupuesta ya en toda trasposición (formalización). Las exposiciones anteriores habían clarificado que este último recurso fue reconocido y usado por FREGE mismo para todos los enunciados sobre el "Sentido". En la praxis, una cuestión como la de si, por ejemplo, las expresiones "comenzar" y "principiar" ("commence" y "begin", J. F. THOMSON) o "round excision" y "circular hole" (LEWIS) son *sinónimas,* sólo puede significar que estas expresiones, en el lenguaje natural considerado, son *usadas como sinónimas* por la mayoría de las personas. Este hecho sólo puede mostrarlo una investigación empírica. Con todo, para todo contexto científico, si la cuestión anterior es afirmada, debe establecerse una prescripción de Sentido propia, que establezca expresamente la sinonimia en cuestión y que, por tanto, valga como único recurso obligatorio.

Mientras que en todos estos ejemplos la interpretación de la sinonimia como igualdad de estructura intensional puede ser mantenida, esto ya no es posible en el caso que vamos a discutir ahora y que, extrañamente, ha sido pasado por alto casi por completo en la literatura sobre FREGE, publicada hasta la fecha. Tomamos los ejemplos del artículo "Gedankengefüge" [18], el último trabajo publicado de FREGE, en el que se elige de nuevo como tema los conectores de lógica de enunciados, ya tratados en el *Begriffsschrift.* Pero traslada el centro de la consideración del plano conceptográfico al plano del Sentido; donde cualesquiera pro-

[18] G. FREGE: *Logische Untersuchungen. Dritter Teil: Gedankengefüge.* En: Beiträge zur Philosophie des deutschen Idealismus, 3 (1923-26) 36-51.

posiciones (por tanto, también proposiciones analíticas y que contengan componentes analíticos) se reúnan en conexiones de lógica de enunciados, lo primario para FREGE será siempre la expresión de las "estructuras" de los Pensamientos, expresados por las proposiciones enlazadas. El Sentido y la Referencia de los conectores de lógica de enunciados se determinan también por estas "estructuras del Pensamiento", y es probablemente esto lo que BARTLETT quiere expresar, cuando, en este contexto, habla del intento de FREGE de construir una "Lógica no simbólica". Por supuesto, aquí nos interesan sólo las observaciones de FREGE sobre la igualdad de Sentido de las conexiones de lógica de enunciados. Comparado con los enunciados hechos, puede ser sorprendente el resultado que obtengamos, pues FREGE considera (l. c.) que

"A y B"	tiene el mismo Sentido que	"B y A"	(39)
"no (A y B)"	"	"no (B y A)"	(40)
"ni A ni B"	"	"ni B ni A"	(41)
"A o B"	"	"B o A"	(43)

Incluso enunciados de la forma

"no (si B, entonces no A)" y
"A y B"

se considera que tienen el mismo Sentido, y, asimismo, los enunciados de los tres siguientes tipos tienen el mismo Sentido:

(1) "no ((no A) y (no B))",
(2) "no (ni A ni B)",
(3) "A o B" (42),

e incluso en las "conexiones de un Pensamiento consigo mismo" FREGE ejemplifica la igualdad de Sentido en los tipos siguientes de enunciados:

(1) "A"
(2) "no (no A)"
(3) "A y A"
(4) "A o A" (44, 49).

En virtud de estos ejemplos uno se inclina a considerar la equivalencia lógica de dos proposiciones como criterio de su igualdad de Sentido, por lo menos en el caso de enunciados de este tipo (obsérvese que se habla de equivalencia *lógica,* no de mera igualdad del valor veritativo). Aun cuando, efectivamente, la sustitución de la equivalencia lógica para la igualdad de Sentido no debe perderse de vista, no se ha de pasar por alto que la interpretación, así hecha, es sin duda algo forzada. FREGE, en el artículo citado, otorga a igualdades de Sentido, como las acabadas de

enumerar, una posición autónoma tal, que han de aparecer anteriormente a todas las relaciones de valores veritativos. Expresado exageradamente, se podría decir: las proposiciones no son sinónimas, porque sean equivalentes lógicamente, sino que son equivalentes lógicamente porque son sinónimas. La primacía, que aquí consigue claramente la esfera del Sentido, viene justificada también por la cita siguiente:

> "Que 'B y A' tiene el mismo Sentido que 'A y B', se ve, sin necesidad de demostrarlo, por el hecho de que se es consciente del Sentido. Tenemos aquí un caso en el que el mismo Sentido corresponde a expresiones lingüísticamente diferentes. Esta divergencia del signo, que expresa, respecto del Pensamiento, que es expresado, es una consecuencia ineludible de la diversidad del aparecer del mundo del Pensamiento en el espacio y en el tiempo" (Gef 39).

Ciertamente, la primera proposición de esta exposición, extremadamente platónica, permite hacer dos interpretaciones diferentes. En primer lugar, se podría pensar que la igualdad de Sentido de "B y A" y de "A y B" —*si* no se conoce su demostración (aunque se considera posible de hacer)— se puede comprender intuitivamente por el hecho de ser consciente del Sentido del conector *y*. Pero, por el contexto, del que se ha tomado esta cita, nos parece seguro que FREGE no quiso decir esto. Más bien se expresa que la igualdad de Sentido de "B y A" y "A y B" se puede comprender intuitivamente, sin demostrarla, por el hecho de ser consciente del Sentido del conector *y*; pero que *debe* ser comprendida también sin demostración, porque no es posible hacerla. Esto último lo justifica también la observación de FREGE de que la sustitutividad de los elementos en "no (A y B)" no ha "de interpretarse como un principio, como en las estructuras del primer tipo (sc. "A y B")" (Gef 40). Parece que FREGE no ha querido reducir a axiomas indemostrados y establecidos como evidentes, sino de modo inmediato a la esfera del Sentido, las leyes lógicas como $\neg\neg A \rightarrow A$, $A \rightarrow \neg\neg A$ (véase Bs viii, 44, 47), $A \longrightarrow A \wedge A$ (Gg I 65 b) y otras. Y en efecto: ¿Cómo se pueden fundamentar, en caso contrario, estas leyes, si no es en referencia a lo que nosotros pensamos, i.e. a lo que *queremos* expresar (por ejemplo, con las palabras de conectores "y", "o", "ni ... ni")? Así consideradas las prescripciones de Sentido para estos casos, p. ej.,

$$A \wedge B \Leftrightarrow B \wedge A,$$

tienen sólo la función de explicitar y comunicar el uso de nuestros signos en la forma de decisiones.

La concepción fundamental platónica, propia por lo menos de los últimos artículos de FREGE, recogidos bajo el título de "Logische Untersuchungen", no permite que sea totalmente claro qué se comprende en una prescripción tal. Hoy nos sentimos inclinados a ver la igualdad de un "rango lógico" como el contenido de un enunciado o prescripción tal, y a buscar en FREGE los inicios de una concepción de esta índole. Sería,

sin duda, interesante seguir este pensamiento, sobre todo en cuanto que parece que posibilitaría la existencia de un puente entre las aproximaciones freguianas del concepto de Sentido y el concepto de "Contenido" en el sentido de "Información". Pero queremos tocar aquí todavía otro problema, que surge del conflicto de la primacía mostrada del dominio del Sentido y de otras manifestaciones que se encuentran (por supuesto, cuando menos, unos diez años antes) en los "Ausführungen über Sinn und Bedeutung". En la discusión de los conceptos, FREGE se decide aquí contra los "lógicos del contenido" y en favor de los "lógicos de la extensión"; en cuanto dice:

"Ellos (i.e. los lógicos de la extensión) tienen la razón, cuando, en virtud de su preferencia por la extensión conceptual frente al contenido conceptual, reconocen que ven la Referencia de las palabras —y no su Sentido— como lo esencial para la Lógica. Los lógicos del contenido... no piensan que en la Lógica no se trata de cómo se derivan unos Pensamientos de otros...; que las leyes lógicas, en primer lugar, son leyes en el reino de las Referencias y que sólo mediatamente se refieren al Sentido" (ASB).

Una investigación filosófica sobre FREGE debe prestar cierta atención a la estructura de este "reino de las Referencias" y del "reino del Sentido", distinto del anterior. En el capítulo siguiente, esta problemática y la del "platonismo" freguiano, que está íntimamente relacionada con la anterior, por lo menos serán todavía señaladas.

2.4. LA CONTAMINACION DE ONTOLOGIA Y SEMANTICA

Lo que hasta aquí llevamos dicho sobre la Semántica de FREGE se refiere casi exclusivamente a las relaciones de las expresiones con su Sentido y su Referencia. De estos mismos, por el contrario, sólo sabemos hasta ahora que a un Sentido sólo puede corresponder una Referencia, y que, en cambio, a una Referencia pueden corresponder varios Sentidos. Dado que ya en el artículo "Ueber Sinn und Bedeutung" FREGE había distinguido entre un estadio de Referencias y un estadio de Pensamientos, y que, como vimos en el capítulo anterior, había elevado éste último al status de una esfera de Sentidos, debemos, para concluir este trabajo, insistir aún algo sobre las mutuas relaciones entre el Sentido y la Referencia, o sea, entre la esfera de Sentidos y la de las Referencias. La necesidad de tratar aquí esta cuestión ha de ser evidente incluso para aquellos para los que el ocuparse de problemas de Semántica y, especialmente, de "esferas de Referencia", es actividad no ya pasada de moda, sino sencillamente superflua o completamente carente de sentido. Es cierto, efectivamente, que la diferenciación de Sentido y Referencia juega un papel secundario en la construcción conceptográfica de la lógica freguiana, y que, por ejemplo, en los *Grundgesetze* es utilizada sólo en dos ocasiones: una, cuando se defiende la interpretación de la igualdad matemática como identidad, y otra, cuando se ha de hacer referencia al "contenido" de proposiciones conceptográficas. Pero, como ha debido quedar claro en la segunda parte de este trabajo, el par de conceptos "Sentido y Referencia" desempeña un papel, no ya importante, sino decisivo en el análisis del lenguaje natural; hasta el punto de que CARNAP ha podido calificar esta aplicación de ambos conceptos de propio "método del análisis semántico" (MaN 144). Finalmente hemos podido apreciar en el capítulo precedente que FREGE intentó, en sus últimas obras, anclar las mismas leyes lógicas en la "esfera del Sentido".

Por consiguiente, no hay duda alguna de que FREGE ha dado un valor respetable a su distinción de Sentido y Referencia; pero, además, hay una segunda circunstancia que justifica el que nos ocupemos de la "temática de las esferas", aún admitiendo que es perfectamente opaca y poco fructífera: la circunstancia de que una parte de la literatura más reciente sobre FREGE se ocupa exclusivamente de la *Ontología de Frege*[1]. Pa-

[1] R. S. WELLS: *Frege's Ontology.* En: The Review of Metaphysics 4 (1951) 537-573. —J. MYHILL: *Two Ways of Ontology in Modern Logic.* ibid. 5 (1952) 639-655 (cf. Recensión por W. MARSHALL en el Journal of Symbolic Logic 16 (1953) 91-92).— G. BERGMANN: *Frege's Hidden Nominalism.* En: The Philosophical Review 67 (1958) 437-459, repr. en G. BERGMANN, *Meaning and Existence,* Madison 1960, 205-224. E. D. KLEMKE: *Professor Bergmann and Frege's Hidden Nomina-*

rece que en estos trabajos —obra todos ellos de autores americanos— la expresión "Ontología" se usa de modo semejante al de los escritos de W. V. QUINE, y, por tanto, en un sentido que no coincide exactamente con el empleo tradicional de ese término[2]. Se puede, sin embargo, designar, por ejemplo, con un cierto derecho como ontológica la distinción entre función y objeto, en tanto que FREGE ha afirmado su validez para todo lo que en general puede ser designado "objeto" y dicho sobre él en calidad de "objeto". Pero en la mayoría de estos trabajos mencionados la "Ontología" comprende también la doctrina de FREGE del Sentido y de la Referencia, para acabar siendo indistinguible de una posición básica filosófica en general.

En la literatura sobre el tema, el acuerdo acerca de la posición filosófica básica de FREGE es tan amplio que deberán aparecer como interpretaciones "extrañas" a la doctrina fundamental de FREGE las exposiciones de ésta como nominalismo por G. BERGMANN y como idealismo objetivo por R. EGIDI[3]. FREGE pasa por ser usualmente un típico representante del "platonismo". Con esta clasificación no nos liberamos, naturalmente, de una serie de dificultades. Y, en efecto, ya NATORP había señalado en 1910 que FREGE "apoya el número... sobre algo así como *ideas platónicas*, a saber sobre contenidos objetivos del pensamiento. Esto es, trata ciertamente... de comprender los contenidos del pensamiento como PLATÓN, pero como el PLATÓN de la primera época, unilateralmente ónticos"[4]. El término "platonismo" había sido aplicado ya por BRUNSCHVICG a un tipo de filosofía matemática[5]. Pero en el sentido específico en que se utiliza hoy la palabra "platonismo" en el contexto de la disputa sobre los fundamentos de la matemática, la encontramos

---

lism. En: The Philosophical Review 68 (1959) 507-514.— H. JACKSON: *Frege's Ontology.* ibid. 69 (1960) 394-395. —R. GROSSMANN: *Frege's Ontology.* ibid. 70 (1961) 23-40.— C. E. CATON: *An Apparent Difficulty in Frege's Ontology.* ibid. 71 (1962) 462-475. Todos estos trabajos, a excepción del de MYHILL de 1952 y de la recensión de MARSHALL, han sido reimpresos en E. D. KLEMKE (Ed.): *Essays on Frege.* Urbana, Chicago, Londres 1968.

[2] Esto lo muestra ya una ojeada a los diccionarios corrientes de Filosofía, en los que se define la "Ontología" como la doctrina del ser, de la sustancia fundamental del ser, de las determinacions generales del ser y, ocasionalmente, también como la Lógica de lo real. Una doctrina tal no es arbitraria. Por ello es evidente para la tradición que sólo puede haber una Ontología. Para Quine, por el contrario, la Ontología es algo más o menos electivo, según convenga: Science is a continuation of common sense, and it continues the common sense expedient of swelling ontology to simplify theory"... "Ontological questions under this view, are on a par with questions of natural science" (Two Dogmas of Empiricism, en W. V. QUINE, *From a Logical Point of View,* 9 Logico-Philosophical Essays. 2.ª Ed. Cambridge, Mass. 1961, 20-46, Cita pág. 45).

[3] G. BERGMANN, op. cit. (nota 1). R. EGIDI: *La consistenza filosofica della logica di Frege.* En: Giornale critico della filosofia italiana 41 (1962) 194-208. BERGMANN critica también la interpretación de EGIDI: *Alternative ontologiche. Risposta alla dr. R. Egidi.* En: Giornale critico della filosofia italiana 42 (1963) 377-405. Véase a este respecto las observaciones de la autora en *"Ontologia e Conoscenza Matematica. Un Saggio su Gottlob Frege"*, Florencia 1963; 217 n 2.

[4] P. NATORP, op. cit. (n.º 106 en nuestra bibliografía).

[5] L. BRUNSCHVICG: *Les Etapes de la Philosophie Mathématique,* 3.ª ed. París 1929, 69.

usada por primeda vez en BERNAYS [6], aunque todavía sin el matiz ideológico que hoy posee tanto para los defensores como para los antagonistas de la línea con ella designada; y que se retrotrae, y no en último lugar, a H. SCHOLZ, que era de la opinión de que "hemos de tener el valor de decidirnos con FREGE por una auténtica metafísica platónica de lo Verdadero y lo Falso" [7], y que, en su ensayo *Platonismus und Positivismus* [8] puso de hecho a disposición de los decididos en esta dirección una ideología completa. La denominación "platonismo" se ha vuelto tan usual desde entonces, que habrá que decir con EGIDI que este concepto es demasiado impreciso para que posibilite cualquier perspectiva nueva sobre el sistema de FREGE (EGIDI, op. cit., 1963, 25 y s.); dejando completamente aparte que con esta caracterización no se tiene en cuenta la hasta ahora poca atendida circunstancia de que, como la doctrina freguiana del juicio, también su idea de la fundamentación de la Lógica no ha sido en modo alguno siempre la misma, y que, por ello, sus escritos no pueden ser citados indiferentemente para la sustentación o refutación de una concepción platónica de la Lógica.

Considerándolo más de cerca, sorprende que FREGE, si bien es cierto que ha distinguido con precisión lo lógico de lo psicológico, haya dicho muy poco positivo acerca del carácter de lo lógico mismo. Ya KERRY encuentra "muy lamentable que FREGE no haya determinado el concepto de lo lógico en ninguno de sus escritos" [9]. Cierto que por entonces habían aparecido sólo unos pocos trabajos de FREGE, y que en el *Begriffsschrift* la Lógica se ocupa del pensar como actividad psíquica, aunque se trate de un "pensar puro", que hace abstracción "de todo contenido dado mediante los sentidos o incluso mediante una intuición a priori" y "permite obtener juicios sólo a partir de los contenidos que se originan de su propia creatividad" (Bs 66). Nos parece fuera de toda duda que FREGE camina en este punto por sendas kantianas, y tampoco la designación de las reglas para los signos conceptográficos como "imágenes" de leyes (Bs 25) nos autoriza a concluir aquí cualquier clase de platonismo.

Tampoco el siguiente pasaje de un artículo de 1882 nos parece que justifique una conclusión tal:

"Difícilmente nos elevaríamos sin signos al pensamiento conceptual. En él damos el mismo signo a cosas ciertamente diferentes, pero parecidas, y no designamos propiamente la cosa singular, sino lo común a ellas: el concepto. Y sólo

[6] P. BERNAYS: *Sur le platonisme dans les mathématiques*, Conférences internatinales sur la Logique mathématique 1934, pbl. en L'Enseignement Mathématique 34 (1935) 59-69. Del "realismo (platónico)" habla (ibi. 20) A. FRAENKEL en su discurso "*Sur la notion d'existence dans les mathématiques*". También HILBERT, en 1922, había visto en FREGE un "realismo conceptual extremo": op. cit. (n.º 12 en nuestra bibliografía) 162.

[7] H. SCHOLZ: *Die klassische und die moderne Logik*. En: Blätter für deutsche Philosophie 10 (1936/37) 254-281 (271).

[8] En: Europäische Revue 19 (1943) 74-83, repr. en Mathesis Universalis, Basel o Darmstadt 1961, 388-398.

[9] B. KERRY: *Ueber Anschauung* etc. (op. cit.), Vierteljahrsschrift für wissenschaftliche Philosophie 11 (1887) 262.

obtenemos éste al designarlo; pues no siendo en sí intuible, necesita de un representa intuible, para poder aparecer ante nosotros. Así, lo sensible nos abre el mundo de lo no-sensible" (WBBs 49-50) [10].

Que tampoco aquí está contenido "realismo del concepto" u "ontologismo" alguno, nos parece totalmente claro por la postura de FREGE en los *Grundlagen* —que son más o menos de la misma época—, donde los objetos lógicos (por lo menos los de la Aritmética) son designados como "inmediatamente dados a la razón" y como su "objeto más propio" (cf. el pasaje citado arriba, pág. 77). Objetividad no significa aquí sino "determinación objetiva", en contraste con el "dominio de posibilidades subjetivas" (Gl 93), de modo que un objeto se dice que es objetivo cuando es él mismo para todo el que de él se ocupe (Gl 72). En este sentido es objetivo, por ejemplo, en los axiomas geométricos "lo legal, conceptual, juzgable, lo que se deja expresar en palabras" (Gl 35), de modo que una delimitación de lo objetivo sólo resulta por contraposición a lo individual subjetivo, y no al "sujeto en general" o a la razón [11]:

"Así entiendo yo por objetividad una independencia de nuestro sentir, intuir e imaginar, del formar imágenes internas a partir de recuerdos de sensaciones pasadas; pero no una independencia de la razón; pues responder a la pregunta de si las cosas son independientes de la razón, significa juzgar sin juzgar, lavar la piel sin mojarla" (Gl 36).

NATORP está, por tanto, completamente en lo cierto cuando escribe (sobre SIMÓN): "la Aritmética pura es para él, como para FREGE (!), no sólo una, sino justamente la ciencia pura de la razón" (op. cit. 143). Para expresarlo inequívocamente: la posición de FREGE en este período de su pensamiento puede ser caracterizada del modo más adecuado como una variante del kantismo [12], con una interpretación mucho menos forzada que la usual, que pretende haber visto ya en este punto "ontolo-

---

[10] Hacemos notar que éste es probablemente el primer lugar en que FREGE rechaza expresamente la concepción de los términos conceptuales como "nombres comunes".

[11] Así se explica también el que se hable —de modo aparentemente incompatible con el antipsicologismo, proclamado— de "imágenes (!) en sentido objetivo". que pertenecen a la Lógica y deben poder dividirse en objetos y conceptos: Gl 37.

[12] La constatación de LINKE de que FREGE no fue neokantiano, y "no tuvo mucho en común" con Otto LIEBMANN y Bruno BAUCH, que trabajaban contemporáneamente en Jena (P. F. LINKE: *Gottlob Frege als Philosoph*, en: Zeitschrift für philosophische Forschung 1 (1946) 75-99, cita 77) es, en efecto, exacta, pero ha de tomarse cum grano salis. Pues LINKE pasa por alto el hecho de que la doctrina de FREGE sobre la función y objeto, así como su colocación de los "pensamientos" en una esfera del Sentido propia, ha ejercido un influjo importante al menos sobre BAUCH. Véase BAUCH: *Ueber den Begriff des Naturgesetzes*. En: Kant-Studien 19 (1914); *Wahrheit und Richtigkeit*. En: Festschrift für J. Volkelt, Munich 1918; *Wahrheit, Wert und Wirklichkeit*, Leipzig 1923; *Die Idee*, Leipzig 1926. Que BAUCH se inspira en FREGE reiteradamente, fue claramente dicho por R. ZOCHER: *Die objektive Geltungslogik und der Immanenzgedanke. Eine erkenntnistheoretische Studie zum Problem des Sinnes* (Escrito de Habilitación en Erlangen) Tübingen 1925 (p. ej., págs. 7, 24).

gismo" en FREGE[13]: las pocas formulaciones del FREGE de este tiempo que no son kantianas "típicas" podrían —como ya BIERICH pudo mostrar en el caso de la terminología de la doctrina del juicio (vide supra página 22, n. 3)— retrotraerse al influjo de LOTZE, que con su interpretación lógica de la doctrina platónica de las ideas y la elaboración de una "esfera de validez" ha ejercido (y no en último término sobre HUSSERL) una influencia importante, y cuyas lecciones de Göttingen pueden haber tenido también repercusión en FREGE[14]. En cualquier caso, concordaría bien con esto el que lo objetivo-no-real lo encontremos aclarado en FREGE mediante el concepto de "validez": si de la proposición "3 es un número primo" se dice que con ella queremos

> "aseverar algo que vale y valdrá siempre objetivamente, con independencia total de nuestra vigilia o de nuestro sueño, de nuestra vida o de nuestra muerte, sin que importe que haya o vaya a haber seres que puedan conocer esa verdad o no" (Tr 159).

La posición que se expresa con estas palabras no puede en verdad ocultar la tendencia a desprenderse también de la relación con la razón, y así se muestra ya en el mismo artículo la inclinación hacia la "ontologización":

> "El concepto es algo objetivo, que no formamos nosotros y que tampoco se forma en nosotros, sino algo objetivo que nosotros tratamos de comprender y que posiblemente acabamos comprendiendo efectivamente, si no hemos buscado erradamente algo donde no hay nada" (Tr 158).

Estas dos citas proceden de los años en los que, según nuestro supuesto anterior, se efectúa el desarrollo de la segunda doctrina del juicio de FREGE. Esta aporta a la cuestión ahora planteada algo decisivamente nuevo y que, sin duda (y extrañamente), no se encuentra en los *Grundgesetze,* donde se sigue tratando sólo del status de las leyes del ser-verdadero, distinguiéndolas de las del tener-por-verdadero, y donde simplemente se presenta de modo exhaustivo la posición antipsicologista fundamental. También esto sucede en el marco, ya de antes conocido: el ser-verdadero es descrito como "independiente del lugar y del tiempo" (Gg I xvii); sus leyes pertenecen a un "dominio de lo objetivo-no-real"

---

[13] MORTAN pregunta, seguramente haciendo referencia a H. SCHOLZ: "¿Realmente hemos de decidirnos por una auténtica metafísica platónica de lo Verdadero y lo Falso y no es posible pensar la doctrina de FREGE sin el reino de lo objetivo-no-real?" (G. MORTAN: *Gottlob Freges philosophische Bedeutung.* Phil. Diss. Jena 1954, 113). La respuesta a esta cuestión es que para FREGE la doctrina de lo objetivo-no-real es de hecho imprescindible, mas su reconocimiento no nos conduce forzosamente a un platonismo en el sentido que aquí MORTAN le da.

[14] Sobre la posición de LOTZE, véase A. LIEBERT: *Das Problem der Geltung.* Berlín 1914. R. ZOCHER ve el "desarrollo de la teoría de las relaciones de LOTZE" en FREGE y BAUCH: op. cit. 30 n. Esto se refiere no sólo a la concepción característica freguiana del concepto como función (BARTLETT 41) de la cual constata que FREGE la tomó de LOTZE para su teoría del concepto.

(ibíd. xviii) y debemos "concebir el conocer como una actividad que no produce lo conocido, sino que aprehende lo ya existente" [15].

Si recordamos que la segunda doctrina del juicio de FREGE se caracterizaba por la disociación de lo que antes era contenido del juicio en Pensamiento y valor veritativo, se nos hará inmediatamente comprensible el que se llegue aquí a una disociación de la esfera del contenido —de lo objetivo-no-real—, en una esfera del Pensamiento y una esfera de la Referencia. La primera es, al mismo tiempo, la esfera del Sentido en general, pues un Sentido que ni es Pensamiento ni es una estructura de Pensamientos ha de ser siempre Sentido de una posible parte proposicional:

> "El lenguaje posee la capacidad de expresar una cantidad inabarcable de Pensamiento con relativamente pocos medios. Esto se hace posible, porque el Pensamiento está formado por partes de Pensamientos y porque estas partes de Pensamientos corresponden a partes proposicionales, a través de las cuales son expresados" [16].

Sorprende en la exposición de FREGE que los Pensamientos sean introducidos en el artículo "Ueber Sinn und Bedeutung", observando

> "que la humanidad tiene un caudal común de Pensamientos que transmite de una generación a otra" [17],

y que ahora, sin embargo, como correlato del Pensamiento vaya apareciendo, cada vez más, no el sujeto que lo comprende, sino la expresión lingüística. Se llega de ese modo a una interferencia entre la división en "sujeto-Sentido-Referencia" y la división en "expresión-Sentido-Referencia", y trataremos de mostrar que hay aquí dos dimensiones completamente distintas y no suficientemente separadas por FREGE.

Antes de que podamos llevar a cabo esta demostración, hemos de completar aún en algunos puntos nuestra exposición del punto de vista freguiano. En la cita de 1914, que acabamos de dar, se acepta, corres-

---

[15] Gg I xxiv. Cf. RH 327: "mientras, según mi opinión, poner un objeto bajo un concepto es sólo el reconocimiento de una relación que ya antes existía".

[16] LuM 124 s. La cita ha sido elegida del tratado de 1914 sólo por su concisa formulación. El punto de vista expuesto es, sin embargo, exactamente el ya existente en 1892.

[17] SuB 29. De modo parecido, BuG 196 n 1: "a pesar de toda la multiplicidad de lenguajes, la humanidad tiene un caudal común de pensamientos". Puede sospecharse (pero, también, sólo sospecharse) que FREGE ha tomado prestada la imagen de HERDER, que, a veces, llama al lenguaje "cámara del caudal del pensamiento humano". No es ningún capricho modernista traer aquí a colación el concepto de información almacenada: para FREGE dos proposiciones expresan el mismo Pensamiento cuando la una "no da más o menos información" que la otra (BuG 196 n), mientras que una proposición carece de contenido, cuando con ella no se nos dice nada nuevo: Gef 50. La siguiente observación de FREGE sobre la trasformación de una proposición mediante contraposición muestra del modo más claro la posibilidad de interpretar el Sentido proposicional como información: "el Sentido apenas es afectado por esto, pues la proposición nos da, tras la transformación, ni más ni menos que la misma información que antes" (Def 3).

pondiendo a la distribución de las proposiciones en partes proposicionales, una distribución de los Pensamientos en partes de Pensamientos. Por el contrario, en otros escritos —como en el artículo "Was ist eine funktion?", pero también ya en "Ueber Sinn und Bedeutung"— encontramos afirmada una posibilidad tal de distribución no en la esfera del Sentido, sino justamente en la de la Referencia. Esta situación puede, al menos, aclararse completamente con ayuda de la obra póstuma de FREGE. FREGE ha defendido —aunque sólo durante algún tiempo— la distribución no sólo de proposiciones, sino también de Pensamientos y de Referencias de expresiones complejas (en particular, de valores veritativos). En una carta a RUSSELL del 28-7-02, escribe, hablando completamente en general:

"La distribución de la proposición corresponde a una distribución del Pensamiento, y ésta, a su vez, a algo en el dominio de las Referencias, y a esto yo lo llamaría un hecho lógico primitivo."

Pero en el caso de las Referencias habrá FREGE de reconocer algo más tarde la inviabilidad de esta concepción. En realidad, este hecho se habría podido mostrar ya mediante una investigación precisa del ejemplo notable de la distribución de los valores veritativos, que para el mismo FREGE, desde el principio, resultaba sospechoso. En efecto, en el artículo "Ueber Sinn und Bedeutung", asevera FREGE:

"Podría también decirse que juzgar es distinguir partes dentro de los valores veritativos. Esta distinción ocurre por recurso a los Pensamientos. Cada Sentido, que perteneciera a un valor veritativo, correspondería a su modo propio de distribución" (SuB 35).

Naturalmente se ha de pensar en primer lugar en examinar esta idea en el caso de proposiciones que se diferencien sólo en el Sentido del sujeto, pero no en su Referencia, ni en nada más. Pero, entonces, surge inmediatamente una objeción irrefutable. Consideremos, para mostrarlo, las dos proposiciones "César es romano" y "El conquistador de la Galia es romano". Puesto que el predicado "ξ es romano" es común a ambas proposiciones, la Referencia común de "César" y "El conquistador de la Galia" ha de ser distribuida de modo diferente si (como FREGE asegura) ha de haber una distribución diferente del valor veritativo. Pero la Referencia es, según FREGE, César mismo y estamos ante la tarea insoluble de encontrar un Sentido en la aserción de que César es distribuido en partes de modos diferentes. Basta con proseguir esta reflexión un tanto, para mostrar la inadecuación del uso de la metáfora de "parte" y "todo" en el dominio de la Referencia: en el segundo ejemplo, en efecto, tendría la Referencia de la palabra Galia que ser una parte de la Referencia de la expresión "El conquistador de la Galia", y la Galia sería, por tanto, una parte de César, pero esto es absurdo. Sobre la base de esta última consideración —usando el ejemplo equivalente "la capital de Dinamar-

ca"— FREGE, en 1905, dejará de hablar de todos y partes en el dominio de la Referencia, pero no, como parece, en el dominio del Sentido [18].

Hablar de "partes" está naturalmente en estrecha conexión con la idea de lo "estructurado" a partir de lo saturado e insaturado. Concebida primitivamente en las expresiones del lenguaje matemático y en los sistemas de signos lógicos, esta distinción de FREGE fue trasferida —de la manera indicada por nosotros— al dominio de los contenidos, y, tras la disociación de éstos, tanto al dominio del Sentido como al de la Referencia. Sobre la esfera de la Referencia, FREGE ha dicho explícitamente:

"A la particularidad del signo funcional, que hemos denominado insaturado, corresponde naturalmente algo en la función misma. Podemos llamar también a ésta insaturada, y caracterizarla por ello como fundamentalmente diferente de los números" (WiF 665).

Para el otro caso, se sigue esto de la fórmula concisa en la que FREGE ha expuesto —en los *Grundgesetze*—, su imagen estructural de las esferas del Sentido y la Referencia:

"Si un nombre es parte del nombre de un valor veritativo, entonces el Sentido de aquel nombre es parte del Pensamiento que éste expresa" (Gg I 5).

Parece que esta breve observación no ha sido suficientemente atendida hasta ahora. De ella se sigue de modo completamente unívoco, que FREGE ha atribuido al nombre funcional un Sentido, además de una Referencia; lo cual es debatido aún hoy por los diferentes investigadores de FREGE [19]. Que con ello no están en lo cierto, se desprende todavía más claramente de los (inéditos) "Ausführungen über Sinn und Bedeutung", que se conservan en Münster. En ellos se subraya explícitamente que en el artículo "Ueber Sinn und Bedeutung" no fueron tratados los términos

[18] Según DUMMETT, que se remite a un texto inédito de Münster, inaccesible para nosotros: M. DUMMETT, Nota: *Frege on Functions*. En: Philosophical Review 65 (1956)229-230.

[19] Ya JONES representa la concepción correcta, vide supra pág. 118 asimismo DUMMETT en su discusión con MARSHALL (Philosophical Review, entre 1953 y 1956), que sostenía la opinión de que FREGE sólo ha dado Sentido y Referencia al nombre propio. WELLS se expresa contradictoriamente: "he (i.e. FREGE) posits that every expression having a denotation has a sense (but not conversely" (op. cit. 551), y, por el contrario, un poco después: "it is needful to introduce the sense-denotation dichotomy only within the class of objects, not within the class of functions" (554).

Por lo demás, nos parece que FREGE ha hablado, también, en los escritos publicados, explícitamente del *Sentido* de dos expresiones conceptuales de tal manera que éste no puede ser idéntico a la Referencia. En la recensión a la "Philosophie der Arithmetik" de HUSSERL dice de la pareja de nombres conceptuales "intersección de un plano y de un cono" y "curva de nivel cuya ecuación en coordenadas paralelas es de segundo grado", que "estas expresiones ni tienen el mismo Sentido ni suscitan las miamas imágenes" (RH 320). Por el contrario, en el artículo "Ueber Sinn und Bedeutung" los conceptos y relaciones eran dejados para "otro artículo". Se mencionaba "Ueber Begriff und Gegenstand"; sin embargo no se encuentra allí nada sobre una extensión del par de conceptos "Sentido y Referencia" a términos conceptuales o nombres funcionales en general.

conceptuales y relacionales, pero que obviamente tienen también una Referencia y un Sentido. Sin embargo, no puede dejarse esto así sin más complicaciones, pues FREGE se ve obligado a rechazar la concepción de que el concepto debe identificarse con el *Sentido* (en vez de con la Referencia) del término conceptual. Esta conclusión —que, de hecho, PAPST obtendrá más tarde para expresiones funcionales en general (función=Sentido del nombre funcional, op. cit. 17) y que parece corresponder también a las ideas de HUSSERL sobre este punto[20]— es muy tentadora, pues fácilmente se siente uno inclinado a considerar la *extensión* del concepto como la Referencia del término conceptual. Lo mismo que en una proposición puede sustituirse, salva veritate, un nombre propio por otro, con sólo que tenga la misma Referencia, así puede un término conceptual ser sustituido, salva veritate, por otro en una proposición con sólo que los conceptos que les correspondan tengan la misma extensión.

Cuando FREGE opina que esta conclusión es incorrecta, porque olvida el hecho de que las extensiones de los conceptos son objetos y no conceptos, a lo que probablemente quiere ir a parar es a que la igualdad que se deriva de la condición de invariancia *puede* existir sólo entre extensiones de conceptos, pues la igualdad —en el sentido de identidad— es sólo posible entre objetos, y nunca entre conceptos. Pero, por otra parte, FREGE tiene ahora que vedarse la conclusión de que, entonces, los conceptos tampoco entrarían en consideración como las Referencias de términos conceptuales, y desarrolla, por eso, acto seguido, la concepción que ya nos es conocida de que entre conceptos siempre hay una relación "correspondiente" a la igualdad, y de que esta relación existe entre dos conceptos, si, y sólo si, tienen la misma extensión. Aceptemos que esto sea correcto: ¿Qué resulta de las consideraciones expuestas para la solución de nuestro problema?

Si el concepto fuera el Sentido del término conceptual, entonces, y según lo dicho, dos términos conceptuales tendrían el mismo Sentido, si, y sólo si, las extensiones de los conceptos correspondientes coincidieran. Del enunciado —válido según los principios semánticos de FREGE— de que el Pensamiento expresado por una proposición no cambia, al sustituir una parte de la proposición por otra con el mismo Sentido, resultaría entonces el enunciado, asimismo válido, de que el Pensamiento expresado por una proposición no cambia al sustituir en ella un término conceptual por otro, cuya extensión conceptual correspondiente sea igual a la del primero. Pero no ocurre siempre así, como puede comprobarse: una sustitución de este tipo no afecta ciertamente al valor veritativo, pero sí al Pensamiento. El concepto, por tanto, no puede *ser el Sentido*

---

[20] Cf. FREGE a HUSSERL en 24.5.91. Ya aquí distingue FREGE entre "Sentido del término conceptual" y "Referencia del término conceptual", de modo que la distinción en cuestión no fue extendida de los nombres propios a los nombres funcionales sólo ulteriormente, es decir, en un momento posterior a la publicación del artículo "Ueber Sinn und Bedeutung."

del término conceptual. Y esto lo ha mostrado FREGE. Por otra parte, ha de notarse que con ello no ha mostrado *todo* lo que es obvio que quería mostrar. Su argumento, basado en la condición de invariancia, tiene, efectivamente, como un resultado adicional, indeseado, el mostrar como invariantes tanto el concepto como la extensión. Encontramos una insuficiencia en este modo de argumentar —ya criticada antes por nosotros (pág. 97): mientras que, al tratar de hallar la Referencia proposicional queda *indeterminado* si existe, además del valor veritativo, otro invariante, sin embargo ahora, al tratar de hallar la Referencia del término conceptual, nos encontramos con dos invariantes diferentes. FREGE no entra en ello, y no estamos seguros de que viera con total claridad la situación. En cualquier caso, también aquí la solución —aunque sea poco elegante— habrá de volver a ser la misma que en el caso anterior: puesto que el concepto "tiene" que ser o el Sentido o la Referencia del término conceptual, y de la prueba que acabamos de aducir se deriva que no puede ser el Sentido, entonces deberá ser la Referencia.

Pero no podemos aceptar esta solución. Por ello, proponemos dejar marginado este modo problemático de argumentar y llevar de otra manera la prueba de la distinción entre concepto y Sentido del término conceptual. Y ya que queremos —al hacer esto— coincidir con las intenciones de FREGE, supongamos que entre dos conceptos existe de hecho una (o la) relación correspondiente a la igualdad, si, y sólo si, las extensiones conceptuales correspondientes son idénticas. Variamos ahora, no la condición de invariancia —como FREGE hace—, sino el criterio de igualdad de Sentido de expresiones aisladas, elaborado por nosotros más arriba, y que afirma que dos nombres propios "A" y "Δ" tienen igual Sentido, si, y sólo si, dos proposiciones cualesquiera que sólo difieran en estas expresiones parciales, tienen el mismo Sentido. Formulamos de manera correspondiente: dos expresiones conceptuales "$\Phi(\xi)$" y "$\Psi(\xi)$" tienen el mismo Sentido, si, y sólo si, las proposiciones resultantes de la introducción de un nombre de argumento tienen el mismo Sentido para todo argumento. Se observa que (si sustituimos "del mismo Sentido" por "de la misma Referencia") la parte derecha de este criterio expresa la equivalencia general de los conceptos, y que, con ello, se trasforma en el correspondiente caso especial de la igualdad de cursos de valores; de modo que tampoco es posible decidirse aquí sobre la *Referencia* del término conceptual. Por el contrario, para el Sentido se obtiene de nuestra explicación [21],

$$\Phi(\xi) \sim \Psi(\xi) \,.\leftrightarrow.\, \Phi(\Delta) \sim \Psi(\Delta) \text{ para todo } \Delta,$$

el Sentido expresado tanto por "$\Phi(\xi)$" como por "$\Psi(\xi)$", por abstracción en el sentido de la teoría general de la abstracción tal como la ha ela-

[21] Aquí "$\ldots \sim ---$" significa que las expresiones "..." y "$---$" son sinónimas. Se trata sólo de un modo de escribir más intuitivo; no se dirá que la sinonimia de dos expresiones corresponde a una relación peculiar entre sus Referencias.

borado LORENZEN [22]. La ampliación para cualesquiera nombres funcionales es fácil de obtener. Por ejemplo, las expresiones relacionales "$\xi \longrightarrow \zeta$" y "$\neg \zeta \longrightarrow \neg \xi$" tienen el mismo Sentido, si atendemos a la observación de FREGE sobre la contraposición (n. 17). Después de lo anteriormente dicho, no es necesario indicar que esta explicación presupone un criterio de sinonimia para proposiciones; dicho más exactamente, lo que resulta es sólo una reducción del problema de la sinonimia de nombres funcionales al de la de proposiciones.

Volvamos, tras este excurso sistemático, a nuestro tema inicial: la exposición de las esferas del Sentido y de la Referencia en los trabajos tardíos de FREGE. R. EGIDI ha subrayado con razón que en FREGE corren paralelas dos corrientes filosóficas fundamentales: la de LEIBNIZ y la de KANT. Mientras que en los primeros escritos se depende más de KANT, en los escritos del segundo período del pensamiento freguiano, de hacia 1895 y desde entonces cada vez más fuertemente, tiene la primera de estas corrientes la preeminencia. Deriva hacia un platonismo inspirado en el reino leibniziano de las verdades eternas, y, con ello, hacia la ontologización [23]. Esta tendencia se muestra claramente, por primera vez, en una contribución a una discusión titulada "Le nombre entier" de 1895:

"Les théorèmes de l'aritmétique ne traitent donc jamais de choses représentées. Ces objets, il est vrai, ne sont ni palpables, ni visibles, ni même réels, si l'on nomme réel ce qui peut exercer et subir une influence. Les nombres ne changent pas; car les théorèmes de l'arithmétique enferment des vérités éternelles" (l.c. 74).

La nueva postura se expresa también terminológicamente: en lugar de hablar de un "dominio", "región", "estadio" del Sentido o de la Referencia, desde el artículo "Ueber die Grundlagen der Geometrie" se habla conscientemente de un "reino de las Referencias" (Geom II 371) y un "reino del Sentido" (Ged 40), y en el artículo "Der Gedanke" FREGE deduce del hecho de que los Pensamientos (tal como él los concibe) no pertenecen ni al mundo exterior ni al de la imaginación, la conclusión de que "ha de ser reconocido un tercer reino" [24]. Refiriéndose a esto, MOR-

---

[22] P. LORENZEN: *Formale Logik* (Berlín 1958) § 13 (Hay traducción española: Lógica Formal. Selecciones Científicas. Madrid, (1970); *Gleichheit und Abstraktion.* En: Ratio 4 (1962) 77-81.

[23] R. ZOCHER escribe en el tratado citado sobre la elaboración husserliana de la oposición entre psicológico-subjetivo y lo lógico-objetivo: "con menos insistencia y exhaustividad en la fundamentación, pero en la misma línea, se encuentran HERBART, más tarde FREGE, y, ante todo, BOLZANO. Si se entiende lo psicológico como empírico-real y lo lógico como ontológico-ideal, puede entonces la oposición fundarse, asimismo, en el platonismo" (op. cit. 1). Esto sucedió luego, aunque no fuera expresamente, tanto en FREGE como en HUSSERL, y por eso se dice después en ZOCHER de la "acentuación freguiano-husserliana de los conceptos Sentido y Referencia" que éstos llevan aquí "todavía acento ontológico" (ibid. 24 n 4).

[24] Ged 60. La imagen, evidentemente muy sugestiva, de un "tercer reino" se encuentra también en RICKERT, y es aquí un reino central del Sentido del juicio, que se pensaba localizado entre el "ser de la realidad" y el "ser de la verdad" (que RICKERT concebía como "valor"). Este tercer reino no es idéntico al de FREGE. De modo curioso se encuentra el término —en una tercera significación, todavía

TAN utiliza aquí el antiguo término "teoría de las tres esferas", *Dreisphärentheorie* (op. cit. 28 n. 3).

FREGE considera el tercer reino como un "reino de aquello que no es perceptible para los sentidos" (Ged 75); entre lo perceptible por los sentidos hay que contar evidentemente lo que sea objeto de la llamada percepción interna. De acuerdo con esto debería esperarse que al reino del Sentido le fueran contrapuestos ahora un reino de lo psíquico y un reino de lo material. Pero, sorprendentemente, no ocurre así. En lugar de éstos encontramos, además del ya conocido "reino de la Referencia", un "reino de las palabras y proposiciones" (Vern 155), y en ello vemos una primera indicación de que FREGE ha mezclado inadmisiblemente en este lugar (sistemático) dos problemas diferentes. En lo sucesivo expondremos nuestra teoría de que FREGE ha contaminado la división ontológica

subjetivo-real
subjetivo-no-real
objetivo-real

con la semántica

signo
Sentido
Referencia

y además de manera que tampoco los dos dominios "centrales" llegan a coincidir en contra de nuestra primera impresión.

Parece que ya en el artículo "Ueber Sinn und Bedeutung" pueden señalarse incongruencias de este tipo; por ejemplo, se habla allí del "paso del estadio de los Pensamientos al de las Referencias (de lo objetivo)" (SuB 34) —como si el estadio del Pensamiento no fuera igualmente objetivo, cosa que el mismo FREGE ha subrayado expresamente. Sorprendente es también la afirmación: "un valor veritativo no puede ser parte de un Pensamiento, como no puede serlo el Sol, pues no es un Sentido, sino un objeto" (SuB 35)— y esto da la impresión de que un Sentido no puede ser nunca objeto, en contradicción no sólo con el supuesto freguiano del "sentido saturado", sino también con la posibilidad de hacer de un Sentido tal la Referencia indirecta de una expresión. Sobre tales pasajes ha querido ya adivinar algo WELLS, sin concebir, sin embargo, la sospecha de que pudiera haber aquí una inadmisible mezcla de dos círculos de problemas. Más bien, adopta una actitud francamente positiva hacia esta interferencia: "en la doctrina de Sentido y Referencia parti-

---

oscura— también en H. WEYL: "Sobre el idealismo, que está llamado a destruir el realismo ingenuo absolutizado en teoría del conocimiento, se levanta un tercer reino, que nosotros vemos representado, por ejemplo, en FICHTE, en la última etapa de su filosofar" (*Die heutige Erkenntnislage in der Mathematik*, Erlangen 1926, pág. 30).

cipan de igual modo la Ontología y la Semántica" (op. cit. 551). De acuerdo con ello hace el centro de su consideración las dos "categorías básicas del ser, función y objeto, y las bases gramático-semánticas sobre las que descansan" (ibíd. 540).

A diferencia de WELLS, nosotros consideramos la intromisión freguiana de la ontología en la doctrina del Sentido y de la Referencia como una contaminación absolutamente ilícita. La ilegitimidad se deduce ya de que no logra hacer coincidir a los miembros centrales de las agrupaciones antes mencionadas. Pues, en efecto, si se pone lo objetivo-no-real como un tercer reino frente a los dos dominios reales de lo subjetivo-psíquico y lo objetivo-físico, pertenecen entonces a este tercer reino no sólo los Pensamientos y sus "partes" [25], sino también, en general, todos los objetos lógicos, tales como conceptos, funciones, cursos de valores, números y valores veritativos. Todos ellos fueron introducidos por FREGE como *Referencias* de determinados signos y conexiones de signos, y la semántica freguiana no permite nunca (en cualquier contexto en que nos movamos) interpretarlos como *Sentidos*. En otras palabras: Lo objetivo-no-real y la esfera del Sentido no coinciden en absoluto; el dominio central de la división en psíquico, objetivo-no-real y físico abarca en verdad toda la región del Sentido, pero se extiende todavía más allá, en tanto que contiene también todos los objetos abstractos que *no* pertenecen ya a la esfera del Sentido. Llamaremos *dimensión ontológica* a la división que le sirve de base, tal como FREGE la ha desarrollado en las *Logische Untersuchungen*, apoyándose en la oposición entre ser y devenir (por lo que es considerada, y con razón, platónica por EGIDI, op. cit. 1963; 261 s.).

Respecto de la observación de KERRY, antes citada, hagamos notar que el dominio del Pensamiento, ampliado hasta los objetos lógicos, abarca con seguridad el dominio de lo lógico. FREGE, de hecho, se manifestó sólo muy tarde, y en una única ocasión, sobre esto:

> "La Lógica no es ilimitadamente formal, como aquí se presupone. Si lo fuera, carecería de contenido. Así como el concepto de *punto* pertenece a la Geometría, también la Lógica tiene sus propios conceptos y relaciones, y sólo mediante ellos puede tener un contenido. Frente a este contenido propio no se comporta formalmente... A la Lógica pertenecen, por ejemplo, la negación, la identidad, la subsunción, la subordinación de conceptos. Se podrá sustituir Carlomagno por Sahara o el concepto de *rey* por el de *desierto* en un razonamiento en tanto la verdad de las premisas no sea afectada por ello; pero no se puede sustituir así la relación de identidad por la de estar situado un punto en un plano. Pues para la identidad valen leyes lógicas que, como tales, no requieren estar incluidas en las premisas, y a las que nada correspondería por el otro lado" (Geom. V. 428).

El que FREGE caracterice explícitamente como "tierra virgen" los problemas que surgen aquí (en conexión sobre todo con las pruebas de inde-

[25] Por lo tanto, no solamente los Sentidos de nombres propios y funcionales.

pendencia de HILBERT), nos indica, al mismo tiempo, que no vamos a encontrar mayores explicaciones en sus primeros escritos. Si, como suponemos, el dominio de lo objetivo-no-real abarca el de lo lógico, entonces incluye también obviamente todas las relaciones de Pensamientos y partes de Pensamientos con los valores veritativos. Además, tiene que comprender todos aquellos Pensamientos que carecen de relación con los valores veritativos, porque pertenecen solamente a la "fábula y a la poesía" [26], entre los cuales, sin embargo, han de ser tan posibles, como entre los demás, relaciones como la de dependencia de un Pensamiento de otro. Tampoco esta esfera puede contener más Pensamientos simples que proposiciones hay (SuB 46, vid. sup. pág. 107), y en ella han de encontrarse, en teoría, incluso infinitos Sentidos y Referencias. Consideremos, para mostrar con CARNAP las consecuencias de esta concepción freguiana, un nombre significativo cualquiera N. Este nombre tiene, además de su Referencia b'N, un Sentido s'N. Si designamos éste último con la expresión "el Sentido de N", tenemos un nuevo nombre, cuya Referencia es s'N, pero que, a su vez, ha de tener un Sentido, que, con seguridad, no es idéntico al Sentido de N. Podemos hacer otra vez de este Sentido s's'N la Referencia de un nombre "el Sentido de 's'N'", etc. (cf. MaN 130). No es difícil imaginar otras construcciones de este tipo a partir de esta muestra.

Pero lo dicho tiene sólo un valor secundario para nuestra cuestión sobre las relaciones internas de lo objetivo-no-real; nos interesa más la ordenación de la división —decisiva para la semántica de FREGE— de signo, Sentido y Referencia. Encontramos aquí que toda división, que se haga siguiendo este esquema, puede colocarse en el interior del *dominio* interferido por la dimensión ontológica, pues los signos pertenecen siempre al mundo exterior; los Sentidos, al objetivo-no-real, y las Referencias a los tres dominios ónticos. Pero precisamente esta última posibilidad nos muestra que la división en signos, Sentidos y Referencias no cae dentro de la *dimensión* ontológica. Más bien tenemos que contraponer a la ontológica una auténtica *dimensión semántica,* desplegada a través del signo, Sentido y la Referencia. Esta se diferencia de aquélla por su "dependencia constelacional": el lugar de un objeto en el esquema signo-Sentido-Referencia puede ser diferente según los casos, como se ve claramente en la construcción de CARNAP. Por el contrario, la pertenencia a un dominio óntico está determinada de una vez por todas: nadie encontrará jamás en el mundo exterior un Pensamiento freguiano ni una imagen de la fantasía, lo mismo que nadie experimentará jamás el que un manzano o un ladrillo lleguen a su conciencia en unión de recuerdos, deseos o sentimientos. Quizá FREGE ha podido engañarse en su consideración de que ser signo, Sentido o Referencia no sean propiedades, debido a que la variabilidad de lugar dentro de la dimensión semántica

[26] "En la fábula y la poesía... puede ocurrir Pensamientos que no son ni verdaderos ni falsos, sino simplemente poéticos" (Geom IV 398 n 1).

no es *completamente* ilimitada. En la observación arriba citada (SuB 35), FREGE había subrayado que objetos, tales como el sol, un valor veritativo o un signo, no pueden trasformarse en Sentidos. También el que todo lo que sea Sentido en la dimensión *semántica,* pertenezca al dominio de los Pensamientos en la dimensión ontológica, puede haber conducido a FREGE a la identificación de ambos dominios y con ello a la ontologización.

Por el contrario, nosotros subrayamos el hecho de que el último paso no es reversible: Pensamientos y partes de Pensamientos pueden desempeñar el papel de Referencias, por ejemplo en el estilo indirecto, pero también en el marco de una construcción como la carnapiana. Esta imagen nos parece completamente esclarecedora: puesto que ser signo, Sentido o Referencia es sólo un papel, no hay justificación alguna para hablar de "esferas", "reinos", etc. en la semántica —a no ser metafóricamente, si alguna vez fuera necesario.

Con esto desaparecen problemas como el anteriormente suscitado de si, en lo que concierne a las leyes lógicas, tiene la esfera del Sentido primacía o no sobre la Referencia (como las *Logische Untersuchungen* dicen) o el de si "las leyes lógicas son en primer lugar leyes en el reino de las Referencias y se refieren sólo mediatamente al Sentido" (ASB). Asimismo desaparece el problema —a veces discutido en la literatura americana— de en qué lugar de una "tabla de entidades" o "tabla ontológica" hay que colocar el Sentido: Los Sentidos no pertenecen en modo alguno a una tabla tal[27]. Liberarnos de estos problemas nos parece que es un resultado muy satisfactorio de nuestra crítica. Con ello no vamos a abandonar la Semántica, sino sólo la concepción de la dimensión semántica como una división en esferas, en favor de su interpretación como un puro recurso conceptual, un "método", para recoger la expresión de CARNAP. Su campo de aplicación son las formaciones lingüísticas, cuya estructura nos induce continuamente a error, en tanto

---

[27] (Adición de 1970). Un tratamiento extenso de esta cuestión se encuentra en mi artículo "*Entitätentafeln*" en *Tradition und Kritik. Festschrift für Rudolf Zocher zum 80. Geburtstag,* publicado por Wilhelm Arnold und Hermann Zeltner (Stuttgart-Bad Cannstatt 1967), donde sin embargo hay que corregir la aserción de que "las funciones nunca pueden hacer las veces de Sentidos, sino sólo de Referencias" (pág. 274). A la crítica del Profesor Reinhardt GROSSMANN a mi conferencia "Tables of Entities" (65 th Annual Meeting of the Western Division of the American Philosophical Association, Chicago, Mayo 4-6; 1967; un resumen de la conferencia se halla impreso en el programa del Congreso) le agradezco la indicación de que los Sentidos de las palabras conceptuales se pueden interpretar como funciones, cuyos argumentos sean Sentidos de nombres propios y cuyos valores sean Pensamientos. En mi respuesta de entonces insistí en que esta circunstancia hacía necesarias ciertas modificaciones en el curso de ideas de mi conferencia, pero que apoyaba justamente la tesis en ella sustentada de la "Relatividad" de Sentido y Referencia: pues, si Sentidos incompletos son funciones, entonces deben ser separados de los Sentidos completos (que son, ciertamente, objetos) —por lo cual sólo así se volverá más claro que, mediante el establecimiento de una rúbrica para "Sentidos", no se delimita ninguna categoría de entidades.

que parece ser la estructura lógica de lo "pensado". Las traducciones freguianas de las formaciones lingüísticas complejas al lenguaje de la Lógica, pero sobre todo sus análisis en el artículo *Ueber Sinn und Bedeutung* serán siempre un modelo clásico, digno de admiración, de la aplicación legítima del método semántico.

SUMARIO

La conceptografía de FREGE no nació desconectada de la tradición filosófica. Puede entenderse como una reasunción de los ideales leibnizianos de una lingua característica, que a la vez constituya un calculus ratiocinator (Capítulo 1.1). FREGE usa la conceptografía como un instrumento para la realización del programa logicista de fundamentar el concepto de número y las leyes de la Aritmética en la Lógica pura. Este programa es desarrollado, por primera vez, en los *Grundlagen der Arithmetik* de FREGE, en conexión con una crítica fundamental del psicologismo husserliano, del empirismo de MILL, así como de la concepción del número de KANT. Además, FREGE, oponiéndose a los representantes de la Aritmética formal, consiguió una profunda comprensión no sólo de la Aritmética, entendida como juego, sino de la naturaleza de los juegos y del cálculo en general. Por desgracia, aprovechó estos conocimientos sólo para criticar el formalismo, ya que él mismo intentaba construir una Aritmética material, en la que los números eran introducidos como extensiones de determinados conceptos y, por ello, como objetos puramente lógicos. Es característico de la construcción en los *Grundlagen der Arithmetik* un procedimiento de abstracción o trasposición, que reduce todas las igualdades existentes entre objetos abstractos a la igualdad de extensiones conceptuales, supuestas éstas últimas como un tipo de fenómeno fundamental (Capítulo 1.2). Las extensiones conceptuales se problematizarán en la realización definitiva del logicismo en los *Grundgesetze der Arithmetik,* que hacen uso de una ampliación y reinterpretación de la conceptografía. Además, una nueva teoría del juicio y una nueva doctrina de función y objeto nos permiten hablar de un segundo período del pensamiento freguiano, que comenzaría hacia 1890 aproximadamente. Con todo, se puede demostrar que la primera de estas teorías, en esencia, se usa ya en los *Grundlagen* de 1884 y en este punto se ha de corregir una interpretación de SCHOLZ. Según la nueva doctrina, los conceptos y relaciones son sólo casos especiales de funciones concebidas como Referencias de expresiones "insaturadas". Estas pueden ser de distintos grados, de acuerdo con el tipo de argumento que posean; con todo, FREGE, conscientemente, no ha considerado más que tres grados funcionales. Independientemente de esto, se puede demostrar que la mayoría de las funciones posibles tampoco son comprendidas en una continuación de los grados freguianos al infinito, ya que FREGE sólo explicó los "grados" para funciones homogéneas (Capítulo 1.3).

Así como al concepto le corresponde su extensión, así a la función le corresponde su curso de valores. Junto al primer procedimiento de trasposición de los *Grundlagen der Arithmetik,* aparece otro, mediante el

cual se explica la igualdad de dos cursos de valores como idéntica a la equivalencia general de las dos funciones que les correspondan. Los cursos de valores, como objetos, son fundamentalmente distintos de las funciones, y esta diferencia no se puede atenuar, al reducirla a una simple diferencia de "aspecto". En su réplica a KERRY, FREGE ha rechazado categóricamente esta última interpretación, representada hoy por BARTLETT y SLUGA. Asimismo es insostenible, aunque sea más interesante, la interpretación de SCHWEITZER, según el cual la introducción freguiana de los nombres de curso de valores ha de entenderse como una introducción de nuevos signos en el contexto de las proposiciones de la conceptografía; pues se puede demostrar que FREGE era de la opinión de que mediante un método tal no se puede atribuir ninguna Referencia a un nuevo signo (Capítulo 1.4).

Además de la doctrina de función y objeto, pertenece a la doctrina fundamental de FREGE una amplia teoría del juicio, que investiga ante todo la aserción de enunciados y la función de designación. La doctrina de Sentido y Referencia se desarrolló en la segunda cuestión y puede ser interpretada como una semántica pura (independientemente de las reflexiones de teoría de conjuntos), en la que los conceptos de Sentido y Referencia se consideran de igual rango. Esta teoría ha encontrado su exposición clásica en el artículo de FREGE "Ueber Sinn und Bedeutung" (Capítulo 2.1).

Las primeras objeciones esenciales contra la concepción de FREGE de la aserción se encuentran en RUSSELL. Estas, en una parte considerablemente grande, se basan en malas interpretaciones, como, por ejemplo, la opinión —aceptada por BIERICH— de que el mismo FREGE intentó revocar su semántica de las proposiciones; con todo, la mayoría de las opiniones dispares de FREGE y RUSSELL sobre la doctrina del juicio se debe a que analizan de modos diferentes las descripciones y las proposiciones con nombres propios no-referenciales. JONES defendió las doctrinas de FREGE contra RUSSELL, aunque exageró la coincidencia de su propia posición con la de FREGE. Frente a una interpretación de PAPST se puede demostrar que, allí donde las opiniones de ambos coinciden realmente, JONES ha logrado la suya de manera totalmente independiente de FREGE. Junto a RUSSELL, BIERICH ha intentado demostrar que la totalidad de la doctrina freguiana sobre la aserción es inconsistente y errónea. Este intento no es válido, ya que BIERICH ha malinterpretado la función del trazo de juicio freguiano y, por este motivo, así como por un uso equívoco de las palabras "proposición aseverativa", se ha vedado la posibilidad de comprender la doctrina freguiana de la aserción y designación. Una interpretación cuidadosa de esto mismo demuestra que, en la doctrina del juicio de FREGE, una proposición referencial no deja de ser el nombre de un valor veritativo, cuando está precedida por el trazo de juicio, y aún cuando la tarea de la combinación total de signos sea aseverar. Más bien, los componentes semánticos y pragmáticos de una proposición aseverativa son independientes entre sí. Similarmente

desaparecen muchas discrepancias de la teoría freguiana, en cuanto se realiza seriamente una distinción entre conceptografía y lenguaje natural, y, con esto, entre los usos de esta teoría para la construcción y el análisis del lenguaje (Capítulo 2.2).

Lo que FREGE ha entendido por "Sentido" de una expresión es un problema de la investigación sobre FREGE, que por su dificultad y complejidad en la mayoría de las ocasiones se debilita mediante su reducción al problema de cuándo dos expresiones tienen el mismo Sentido (i.e. son sinónimas) en la Semántica de FREGE. Apoyándonos en una observación —poco atendida— de FREGE, podemos obtener un método para reducir la sinonimia de expresiones singulares a sinonimia de proposiciones. Esto supone que el Sentido de las expresiones singulares no se constituye mediante el Sentido de las proposiciones, de modo que surge la cuestión de la relación entre el Sentido de las proposiciones y el de las palabras en la Semántica de FREGE. Se puede demostrar que la referencia usual, que hay en numerosos trabajos contemporáneos, a las exposiciones de FREGE sobre el contexto proposicional es confusa y, por ello, insostenible. Ya que estas exposiciones se derivan de tres círculos de problemas completamente distintos —antipsicologismo, incompletud de las expresiones y lenguaje natural—, el término "contexto proposicional", en ellas incluido, tiene un sentido distinto en cada caso. Mediante esta aclaración son mitigadas, por lo menos, ciertas contradicciones de las observaciones de FREGE. El enunciado positivo de la tesis del contexto vale, en cuanto que las palabras tienen ya su Sentido siempre y exclusivamente en relación al contexto del habla y, con ello, al contexto proposicional. Ya que es absurdo negarles este Sentido luego, cuando no se encuentren en el contexto de alguna proposición, el enunciado negativo de la tesis del contexto no vale.

En los escritos publicados de FREGE no se encuentra ningún criterio para la igualdad de Sentido de las proposiciones. BIERICH ha intentado, perspicazmente, derivar un criterio de esta índole de otras exposiciones de FREGE. Su resultado coincide con un criterio, formulado por el mismo FREGE y publicado, por primera vez, por BARTLETT unos diez años más tarde. Según este criterio, la sinonimia de proposiciones es igual a la equivalencia lógica o a la igualdad de los conjuntos de consecuencias de ambas. Pero se puede demostrar que varias consecuencias de este criterio se encuentran en contradicción con otras exposiciones de FREGE. Por ejemplo, según el criterio, son sinónimas las expresiones "1+3" y "3+1", mientras que FREGE usa precisamente en otro lugar estas expresiones como paradigma de una desigualdad de Sentido. Además, se puede demostrar que ciertos ejemplos de FREGE sobre la igualdad de Sentido de proposiciones no se pueden demostrar como sinónimos con este criterio o se pueden demostrar sólo si se elimina la restricción impuesta en el criterio de que se usen sólo recursos puramente lógicos. mediante la aceptación de "prescripciones de Sentido" para la formalización de proposiciones del lenguaje corriente. El concepto de isomor-

fismo intensional de CARNAP proporciona en estos casos la mejor explicación de la igualdad de Sentido freguiana. La circunstancia de ser demasiado rígida en ciertos casos especiales de las conexiones de lógica de enunciados, siendo, en cambio, adecuada la equivalencia lógica, permite sospechar que la exposición de la sinonimia de FREGE no ha sido siempre la misma. Se plantea la cuestión de si FREGE no ha cambiado completamente su punto de vista en sus últimos escritos (Capítulo 2.3).

En efecto, contrasta con la exposición fundamental de FREGE del primer período, predominantemente kantiana, y con su actitud siguiente, bastante neutral, la creciente "ontologización" de sus últimos escritos. Estos suponen —cosa que no se discute en los escritos publicados de FREGE— que el esquema Sentido-Referencia vale también para nombres funcionales. En un manuscrito póstumo, FREGE sólo logra demostrar positivamente que el concepto es distinto del Sentido de la palabra conceptual, no logrando demostrar, en cambio, la identidad del concepto con la Referencia de ésta última. La igualdad de Sentido de los nombres funcionales puede reducirse, de manera parecida a la empleada antes, a la igualdad de Sentido de las proposiciones. Pero la idea de FREGE de que hay una estructura del tipo parte-todo en la esfera de la Referencia resulta insostenible. Al mismo tiempo, la introducción de la *Ontología en la Semántica de Frege*, introducción aceptada por la totalidad de la literatura contemporánea sobre FREGE, parece una mezcla inadmisible. En particular, se puede demostrar que FREGE ha contaminado aquí una división ontológica con otra semántica, y que el "tercer reino" de lo objetivo-no-real de FREGE no coincide ni con la esfera del Pensamiento ni con el dominio de lo lógico. Sólo con una separación rigurosa entre Ontología y Semántica, como dos dimensiones independientes entre sí, se puede lograr la preservación y desarrollo ulterior del fructífero rudimento freguiano de una Semántica pura, que esté, especialmente, libre de la Ontología (Capítulo 2.4).

BIBLIOGRAFIA

1. ANGELELLI, I.: *Introduction* a número 15 (págs. vii-xviii).
2. ANSCOMBE, G. E. M.: *An Introduction to Wittgenstein's Tractatus*, Londres, 1959.
3. ARMS, R. A.: *The Notion of Number and the Notion of Class*, Filadelfia, Universidad Pennsylvania, 1917.
4. BACHMANN, F., y SCHOLZ, H.: *Der wissenschaftliche Nachlass von Gottlob Frege*, en "Actes du Congr. Int. de Philosophie Scientifique", Sorbona, París, 1935. Publ. París, 1935 (Actualités scientifiques et industrielles, número 388-395; VIII, i. e. número 395, IV, 24-30).
5. BAR-HILLEL, Y.: *'Comments on Logical Form'*, Philosophical Studies, 2 (1951), 26-29.
6. BARTLETT, J. M.: *Funktion und Gegenstand. Eine Untersuchung in der Logik von Gottlob Frege*, Munich, 1961 (tes. doct.).
7. BAUCH, B.: *'Ueber den Begriff des Naturgesetzes'*, Kant-Studien, 19 (1914), 303-337.
8. —: *'Wahrheit und Richtigkeit'*, en Festschrift for J. Volkelt, Munich, 1918.
9. —: *Wahrheit, Wert und Wirklichkeit*, Leipzig, 1923.
10. —: *Die Idee*, Leipzig, 1926.
11. BERGMANN, G.: *'Frege's Hidden Nominalism'*, The Philosophical Review, 67 (1958), 437-459. Reimpreso en G. BERGMANN: *Meaning and Existence*, Madison, 1960, 205-224.
12. BERNAYS, P.: *'Sur le platonisme dans les mathématiques'*, L'enseignement mathématique, 34 (1935), 52-69.
13. BETH, E. W.: *The Foundations of Mathematics. A Study in the Philosophy of Science*, Amsterdam, 1959, 2.ª ed. rev. 1964.
14. BIERICH, M.: *Freges Lehre von dem Sinn und der Bedeutung der Urteile und Russells Kritik an dieser Lehre*. Hamburgo, 1951 (tes. doct.).
15. BIRJUKOV, B. V.: *'O rabotach Frege po filosofskim voprosam matematiki'*. Traducción inglesa en *Two Soviet Studies on Frege*, trad. y ed. por I. ANGELELLI, Dordrecht, 1964, 1-51.
16. BOCHENSKI, I. M.: *Formale Logik*, Friburgo, Munich, 1962[2].
17. BRUNSCHVICG, L.: *Les Étapes de la Philosophie Mathématique*, París, 1929[3].
18. CARNAP, R.: *Der logische Aufbau der Welt*, Berlín, 1928 (reimpreso: Hamburgo, 1961).
19 —: *Logische Syntax der Sprache*, Viena, 1934, 2.ª ed., ibid., 1968.
20. —: *Meaning and Necessity. A Study in Semantics and Modal Logic*, Chicago, 1956[2] (1.ª ed.: 1947).
21. CATON, C. E.: *'An Apparent Difficulty in Frege's Ontology'*, The Philosophical Review, 71 (1962), 462-475.
22. CHURCH, A.: *'Schröder's Anticipation of the Simple Theory of Types'*, Journal of Unified Science (Erkenntnis), 9 (1939), 149-152.
23. —: Recensión de la obra de Carnap: *Introduction to Semantics*, The Philosophical Review, 52 (1943), 298-304.
24. —: Recensión del núm. 33, The Journal of Symbolic Logic, 9 (1944), 63-65.
25. DALGARNO, G.: *Ars signorum, vulgo character universalis et lingua philosophica, etc.*, Londres, 1661.
26. DEDEKIND, R.: *Was sind und was sollen die Zahlen?*, Brunswick, 1888, 1965[10]. Traducción inglesa en R. DEDEKIND, *Essays on the Theory of Numbers*, La Salle, Ill., 1901, 1948[4].
27. DROBISCH, M. W.: *Neue Darstellung der Logik nach ihren einfachsten Verhältnissen, mit Rücksicht auf Mathematik und Naturwissenschaft*, Leipzig, 1851[3].
28. DUMMETT, M.: *'Note: Frege on Functions'*, The Philosophical Review, 65 (1956), 229-230.

29. —: *'Nominalism'*, The Philosophical Review, 65 (1956), 491-505.
30. EGIDI, R.: *'La consistenza filosofica della logica di Frege'*, Giornale Critico della Filosofia Italiana, 41 (1962), 194-208.
31. —: *Ontologia e Conoscenza Matematica. Un Saggio su Gottlob Frege*, Florencia, 1963.
32. ERDMANN, B.: *Logik. I: Logische Elementarlehre*, Halle, 1892, 1907[2].
33. FARBER, M.: *The Foundation of Phenomenology. Edmund Husserl and the Quest for a Rigorous Science of Philosophy*, Cambridge, Mass., 1943.
34. FØLLESDAL, D.: *Husserl und Frege. Ein Beitrag zur Beleuchtung der Entstehung der phänomenologischen Philosophie*, Oslo (Acad.), 1958.
35. FRAENKEL, A. A.: *'Sur la notion d'existence dans les mathématiques'*, L'Enseignement mathématique, 34 (1935), 18-32.
36. FREGE, F. L. G., *Rechnungsmethoden, die sich auf eine Erweiterung des Grössenbegriffes gründen*, Jena (Habilitationsschrift). Reimpreso en núm. 65.
37. —: *Begriffsschrift, eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens*, Halle a. S., 1879. Reimpreso en *Begriffsschrift und andere Aufsätze*, 2.ª ed., con observaciones de Husserl y Scholz, ed. por I. Angelelli, Hildesheim, 1964.
38. —: *'Booles rechnende Logik und meine Begriffsschrift'*. El manuscrito, sin publicar, se encuentra en el Institut für Mathematische Logik und Grundlagenforschung en Münster.
39. —: *'Ueber die wissenschaftliche Berechtigung einer Begriffsschrift'*, ZPPK 81 (1882), 48-56. Reimpreso en *Begriffsschrift und andere Aufsätze, cf. núm.* 37.
40. —: *Die Grundlagen der Arithmetik. Eine logisch mathematische Untersuchung über den Begriff der Zahl*, Breslau, 1884 (2.ª ed.: 1934. Reimpreso: Oxford, 1950 (alemán-inglés, ed. revisada, 1953) y Hildesheim, 1961).
41. —: *'Ueber das Trägheitsgesetz'*, ZPPK, 98 (1891), 145-161. Reimpreso en núm. 65.
42. —: *Function und Begriff*, Jena, 1891. Reimpreso en núm. 65.
43. —: *'Ueber Begriff und Gegenstand'*, Vierteljahrsschrift für wissenschaftliche Philosophie, 16 (1892), 192-205. Reimpreso en número 65.
44. —: *'Ueber Sinn und Bedeutung'* ZPPK, 100 (1892), 25-50. Reimpreso en núm. 65.
45. —: *Grundgesetze der Arithmetik. Begriffsschriftlich abgeleitet*, I, Jena, 1893 (reimpreso, junto con Volumen II: Hildesheim y Darmstadt, 1962).
46. —: Recensión del número 74. ZPPK 103 (1894), 313-332. Reimpreso en núm. 65.
47. —: *'Kritische Beleuchtung einiger Punkte in E. Schröder's Vorlesungen über die Algebra der Logik'*, Archiv für systematische Philosophie 1 (1895), 433-456. Reimpreso en núm. 65.
48. —: *'Le nombre entier'*, Revue de Métaphysique et de Morale 3 (1895), 73-78. Reimpreso en número 65.
49. —: *Ueber die Begriffsschrift des Herrn Peano und meine eigene'* Berichte über die Verhandlungen der Königlich Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig, Mathematisch-physische Classe 48 (1896), 361-378.
50. —: Lettera del sig. Frege all'Editore (=Carta a Peano en septiembre 29, 1896, constituyendo una respuesta a la recensión de Peano del primer volumen de "*Grundgesetze der Arithmetik*"), en Revue de mathématiques (Rivista di matematica) 6 (1896-99), 53-59.
51. —: *Grundgesetze der Arithmetik. Begriffsschriftlich abgeleitet*. Volumen 2, Jena, 1903 (reimpreso, junto con vol. 1: Hildesheim y Darmstadt, 1962).
52. —: *'Was ist eine Funktion?'*, en Festschrift Ludwig Boltzmann gewidmet zum sechzigsten Geburtstag 20. Februar 1904, Leipzig, 1904, 656-666. Reimpreso en núm. 65.
53. —: *'Ueber die Grundlagen der Geometrie'*, en JDMV.

12 (1903), I: 319-324, aquí citado como Geom I.
II: 368-375, aquí citado como Geom II.
15 (1906), I: 293-309, aquí citado como Geom III.
II: 377-403, aquí citado como Geom IV.
III: 423-430, aquí citado como Geom V.

54. —: *'Antwort auf die Ferienplauderei des Herrn Thomae'*, JDMV, 15 (1906), 586-590, cf. núm. 135. Reimpreso en núm. 65.
55. —: *'Die Unmöglichkeit der Thomaeschen formalen Arithmetik aufs Neue nachgewiessen'*, JDMV, 17 (1908), 52-55. Reimpreso en núm. 65.
56. —: *'Schlussbemerkung'*, JDMV, 17 (1908), 56 (Con referencia a núm. 137). Reimpreso en núm. 65.
57. —: *'Der Gedanke. Eine logische Untersuchung'*, Beiträge zur Philosophie des Deutschen Idealismus 1 (1918-19), 58-77. Reimpreso en núm. 65.
58. —: *'Die Verneinung. Eine logische Untersuchung'*, ibid. 143-157. Reimpreso en núm. 65.
59. —: *'Logische Untersuchungen. Dritter Teil: Gedankengefüge'*, ibid. 3 (1923-26), 36-51. Reimpreso en núm. 65.
60. —: *'Ausführungen über Sinn und Bedeutung'*. Manuscrito sin publicar en el Institut für Mathematische Logik und Grundlagenforschung de Münster. Probablemente, de hacia 1895.
61. —: *'Begründung meiner strengeren Grundsätze des Definierens'*. Idem, probablemente, de hacia 1896.
62. —: Cartas a Bertrand Russell. Idem.
63. —: Cartas a Edmund Husserl. Idem.
64. —: *'Ueber Logik in der Mathematik'*. Idem, listo para publicación en 1914.
65. —: *'Kleine Schriften* (ed. por I. Angelelli), Darmstadt, 1967.
66. GEACH, P. T.: *'Russell's Theory of Descriptions'*, Analysis, 10 (1950), 84-88.
67. —: *'On Frege's Way Out'*, Mind, 65 (1956), 408-409.
68. GRASSMANN, H. G.: *Geometrische Analyse geknüpft an die von Leibniz erfundene geometrische Charakteristik*, Leipzig, 1847.
69. GROSSMANN, R.: *'Frege's Ontology'*, The Philosophical Review, 70 (1961), 23-40. Reimpreso en *Essays in Ontology* (Iowa Publications in Philosophy, I) Iowa City y The Hague, 1963, pp. 106-121.
70. HANKEL, H.: *Vorlesungen über die complexen Zahlen und ihre Functionen*. Thl. I.: Theorie der complexen Zahlensysteme, insbesondere etc. Leipzig, 1867.
71. HEINE, E.: *'Die Elemente der Functionenlehre'*, Journal für die reine und angewandte Mathematik (Crelle's Journal) 74 (1872), 172-188.
72. HILBERT, D.: *'Neubegründung der Mathematik. Erste Mitteilung'*, Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Hamburgen Universität, 1 (1922), 157-177 (Reimpreso en Ges. Abh. 3 (Berlin, 1935) y en Hilbertiana, Darmstadt, 1964, 12-32).
73. HOERING, W.: *'Frege und die Schaltalgebra'*, Archiv für mathematische Logik und Grundlagenforschung, 3 (1957), 125-126.
74 HUSSERL, E.: *Philosophie der Arithmetik. Psychologische und logische Untersuchungen*, primer (y único) volumen, Halle a. S. 1891.
75. —: *Logische Untersuchungen*, Halle a. d. S. I, 1900, II_1 y II_2 1901 (versión castellana, 'Investigaciones Lógicas', Revista de Occidente, Madrid, 1967 [2]).
76. JACKSON, H.: *'Frege's Ontology'*, The Philosophical Review, 69 (1960), 394-395.
77. JACOBY, G.: *Die Ansprüche der Logistiker auf die Logik und ihre Geschichtschreibung*, Stuttgart, 1962.
78. JONES, E. E. C.: *Elements of Logic as a Science of Propositions*, Edimburgo, 1890.
79. —: *'Mr. Russell's Objections to Frege's Analysis of Propositions'*, Mind, 19 (1910), 379-386.
80. —: *'A New Law of Thought'*, Proceedings of the Aristotelian Society, N. S. 11 (1911), 166-186.
81. JOURDAIN, P. E. B., Recensión del núm. 106. Mind 20 (1911), 552-560.

82. —: Carta al Editor. Mind 21 (1912), 470-471 (con referencia al núm. 101).
83. KAESBAUER, M. y F. von KUTSCHERA (editores), *Logik und Logikkalkül.* Festschrift Wilhelm Britzelmayr zum, 70. Geburtstag. Friburgo, Munich, 1962.
84. KANT, I.: Kritik der reinen Vernunft, 1.ª ed. Riga 1781; 2.ª ed. 1787. Citas del vol. II de *Complete Works* (ed. por W. Weischedel), Wiesbaden, 1958 y Darmstadt, 1959.
85. —: *Prolegomena zu einer jeden künftigen Metaphysik die als Wissenschaft wird auftreten können,* Riga, 1783. En vol. III de *Complete Works* (ed. por W. Weischedel), Wiesbaden, 1958 y Darmstadt, 1959.
86. KERRY, B.: *'Ueber Anschauung und ihre psychische Verarbeitung'*, Vierteljahrsschrift für wissenschaftliche Philosophie, 9 (1885), 433-493; 10 (1886), 419-467; 11 (1887), 53-116, 249-307; 13 (1889), 71-124, 329-419; 14 (1890), 127-167.
87. KHATCHADOURIAN, H.: *'Frege on Concepts'*, Theoria, 22 (1956), 85-100.
88. KIRCHER, A.: *Polygraphia nova et universalis, ex combinatoria arte detecta,* Roma, 1663.
89. KLEMKE, E. D.: *'Professor Bergmann and Frege's "Hidden Nominalism"'*, The Philosophical Review, 68 (1959), 507-514.
90. KNEALE, W. C., y KNEALE, M.: *The Development of Logic,* Oxford, 1962 (versión española, en prensa, Ed. Tecnos, Madrid).
91. KUTSCHERA, F. von, *Die Antinomien der Logik. Semantische Untersuchungen.* Friburgo, Munich, 1964 (Habilitationsschrift).
92. LEIBNIZ, G. W.: *Nouveaux essais sur l'entendement humain, par l'auteur du système de l'harmonie préetablie.* 1704. En: Gerh. Phil. V, 39-509 (Berlin, 1882). Publicado por vez primera en núm. 113.
93. —: *Die philosophischen Schriften von.* 7 vols. ed. por C. J. Gerhardt. Berlin, 1875-90.
94. —LIEBERT, A.: *Das Problem der Geltung,* Berlin, 1914 (Kantstudien Ergänzungshefte, 32), 2.ª ed., Leipzig, 1920.
95. LINKE, P. F.: *'Gottlob Frege als Philosoph'*, Zeitschrift für philosophische Forschung, 1 (1946-47), 75-99.
96. —: *'Was ist Logik?'* Wissenschaftliche Zeitschrift der Friedrich-Schiller-Universität Jena, 3 (1953-54), Gesellschafts und sprachwissenschaftliche Reihe, Heft, 2/3, 179-190.
97. LOCKE, J.: *An Essay concerning Human Understanding,* 1960. Citado de *The Works of John Locke, Esq. ; In Three Volumes.* Vol. I. La 3.ª ed., Londres, 1727.
98. LORENZEN, P.: *Formale Logik,* Berlin, 1958, 3.ª ed. (con un apéndice sobre juegos dialógicos), ibid., 1967 (Hay versión española: P. LORENZEN, Lógica Formal, Madrid: Selecciones Científicas, 1970).
99. LLULL, R.: *Ars magna et ultima.* En: *Raymundi Lullii Opera ea quae ad adinventam ab ipso artem universalem... pertinent etc.* Strasbourg, 1617.
100. MARSHALL, W.: Recensión del núm. 105. The Journal of Symbolic Logic, 16 (1953), 91-92.
101. MAXWELL, J. J.: *'Note on a Review of Prof. Natorp's Die Logischen Grundlagen der exakten Wissenschaften'*, Mind, 21 (1912), 302-303 (con referencia al núm. 81).
102. MEINONG, A. von: *Ueber die Stellung der Gegenstandstheorie im System der Wissenschaften,* 2.ª ed., Leipzig, 1910 (1.ª ed,. ibid., 1907).
103. MILL, J. St.: *A System of Logic Ratiocinative and Inductive, being a Connected View of the Principles of Evidence and the Methods of Scientific Investigations,* Londres, 1843.
104. MORTAN, G.: *Gottlob Freges philosophische Bedeutung,* Jena, 1954 (tes. doct.).
105. MYHILL, J. R.: *'Two Ways of Ontology in Modern Logic'*, The Review of Metaphysics, 5 (1952), 632-655.
106. NATORP, P.: *Die logischen Grundlagen der exakten Wissenschaften,* Leipzig, Berlin, 1910.
107. OSBORN, A. D.: *Edmund Husserl and his Logical Investigations,* Ann Arbor, 1934, 2.ª ed., 1949.

108. PAPST, W.: *Gottlob Frege als Philosoph*, Berlin, 1932 (tes. doct.).
109. QUINE, W. V. O.: *'Two Dogmas of Empiricism'*, The Philosophical Review, 60 (1951), 20-43. Reimpreso, con algunos cambios menores, en núm. 111, págs. 20-46 (versión española, vid. infra, 111, *Dos dogmas del Empirismo*, págs. 49-81).
110. —: *'On Frege's Way Out'*, Mind, 64 (1955), 145-159.
111. —: *From a Logical Point of View. 9 Logico - Philosophical Essays*, 2.ª ed. rev., Cambridge-Mass., 1961 (1.ª ed., 1953) (Hay versión española: W. V. O. QUINE: *Desde un punto de vista lógico*, Barcelona: Ariel, 1962).
112. —: *Set Theory and its Logic*, Cambridge-Mass., 1963.
113. RASPE, R. E. (ed.) *Oeuvres philosophiques latines et françaises de feu Mr. de Leibnitz. Tirées de ses Manuscrits qui se conservet dans la Bibliothèque Royale à Hanovre* et publiées par M. Rud. Eric Raspe. Avec une Préface de Mr. Kaestner, Professeur en Mathématiques à Göttingue. Amsterdam, Leipzig, 1765.
114. RESNIK, M. D.: *'Some Observations related to Frege's Way Out'*, Logique et Analyse N. S., 7 (1964), 138-144.
115. RIVETTI BARBO, F.: *'Il "Senso e Significato" di Frege: Ricerca teoretica sul Senso e Designato delle espressioni, e sui Valori di Verità'*, en Studi di filosofia e di storia della filosofia in onore di Francesco Olgiati, Milán, 1962, 420-483 (citado aquí según la paginación de la separata).
116. RUSSELL, B.: *The Principles of Mathematics*, 2.ª ed., Londres, 1937 (7.ª impresión: 1956; 1.ª ed.: 1903) (Hay trad. esp.: RUSSELL, B., *Los Principios de la Matemática*, Madrid, Espasa-Calpe, 2.ª ed., 1967).
117. —: *'The Logical and Arithmetical Doctrines of Frege'*, Appendix A del núm. 116 (= págs. 475-496 de la 1.ª ed., 501-522 de la 2.ª ed.) (en la versión esp.: Apéndice A, *Las Doctrinas de Frege sobre Lógica y Aritmética*, págs. 567-593).
118. —: *'On Denoting'*, Mind, 14 (1905), 479-493. Múltiples reimpresiones.
119. SCHNELLE, H.: *Zeichensysteme zur wissenschaftlichen Darstellung. Ein Beitrag zur Entfaltung der Ars characteristica im Sinne von G. W. Leibniz*, Stuttgart-Bad Cannstatt, 1962.
120. SCHOLZ, H. y SCHWEITZER, H.: *Die sogenannten Definitionen durch Abstraktion. Eine Theorie der Definitionen durch Bildung von Gleichheits-verwandtschaften*, Leipzig, 1935.
121. SCHOLZ, H.: *'Die klassische und die moderne Logik'*, Blätter für deutsche Philosophie, 10 (1936-37), 254-281.
122. —: *'Die Sonderstellung der Logik-Kalküle im Bereich der elementaren logistischen Kalkülforschung'*, en Travaux du IXe Congrès International de Philosophie (Congrès Descartes), 6: Logique et Mathématiques, París, 1937, 40-42.
123. —: *'Leibniz'*, Jahrbuch der Kaiser Wilhelm-Gesellschaft zur Förderung der Wissenschaften, 1942, 205-249. (Reimpreso en número 127, 128-151.)
124. —: *'Was will die formalisierte Grundlagenforschung?'*, Deutsche Mathematik, 7 (1942; publicado en Heft 2/3 en 1943), 206-248.
125. —: *'Platonismus und Positivismus'*, Europäische Revue, 19 (1943), 74-83. Reimpreso en número 127, 388-398.
126. —: Recensión del número 20. Zentralblatt für Mathematik, 34 (1950), 1-3.
127. —: *Mathesis Universalis. Abhandlungen zur Philosophie als strenger Wissenschaft* (editado por H. Hermes, F. Kambartel y J. Ritter), Basilea, 1961, y Darmstadt, 1961.
128. —: véase asimismo BACHMANN, F.
128. SCHROEDER, E.: *Vorlesungen über die Algebra der Logik (Exakte Logik)*, Leipzig I 1890, II_1 1891, II_2 1905, III_1 1895. Reimpreso: Bronx, N. Y. 1966.
129. SCHROETER, K.: *'Was ist eine mathematische Theorie?'*, JDMV 53 (1943), 69-82.
130. SLUGA, H. D.: *'Frege und die Typentheorie'*, en núm. 83, 195-209.

131. SOBOCINSKI, B.: *L'Analyse de l'antinomie Russellienne par Leśniewski'*, Methodos 1 (1949), 94-107, 220-228, 308-316; 2 (1950), 237-257.
132. STAMMLER, G.: *Der Zahlbegriff seit Gauss. Eine erkenntnistheoretische Untersuchung*, Halle a. S. 1926.
133. THOMAE, J. K.: *Elementare Theorie der analytischen Functionen einer complexen Veränderlichen*, Halle a.S., 2.ª ed., 1898 (1.ª ed. titulada *'Elementare Theorie der analytischen Functionen einer Variabeln'*, Halle a.S. 1880).
134. —: *'Gedankenlose Denker. Eine Ferienplauderei'*, J D M V 15 (1906), 434-438.
135. —: *'Erklärung'*, J D M V 15 (1906), 590-592 (con referencia a núm. 54).
136. —: *'Bemerkung zum Aufsatze des Herrn Frege'*, JDMV 17 (1908), 56 (con referencia a número 55).
137. TRENDELENBURG, F. A.: *Historische Beiträge zur Philosophie. Dritter Band: Vermischte Abhandlungen*, Berlín, 1867.
138. WAISMANN, F.: *Einführung in das mathematische Denken. Die Begriffssbildung der modernen Mathematik. Mit einem Vorwort von K. Menger.* 1.ª ed., Viena, 1936; 3.ª ed., Munich, 1970.
139. WELLS, R. S.: *'Frege's Ontology'*, The Review of Metaphysics 4 (1950-51), 537-573.
140. WEYL, H.: *Die heutige Erkenntnislage in der Mathematik*, Erlangen, 1926.
141. WIENPAHL, P. D.: *'Frege's Sinn und Bedeutung'*, Mind 59 (1950), 483-494.
142. WILKINS, J.: *Mercury, or the secret and swift Messenger: shewing how a Man may with Privacy and Spead communicate his Thoughts to a Friend at a Distance*, Londres, 1641.
143. —: *An Essay towards a Real Character and a Philosophical Language, with an alphabetical Dictionary*, Londres, 1668.
144. WITTGENSTEIN, L.: *'Logisch-Philosophische Abhandlung'*, Annalen der Naturphilosophie 14 (1921), 185-262. Reimpreso en vol. 1 del núm. 146. Editado, en alemán e inglés, como *Tractatus Logico-Philosophicus*, con una introducción de Bertrand Russell, N. Y., Londres, 1922 (7.ª impresión, 1958). (Agotada la versión castellana en Rev. Occidente.)
145. —: *Philosophische Untersuchungen/Philosophical Investigations*, trad. por G. E. M. Anscombe. Oxford, 1953, 2.ª ed., ibíd., 1958. Texto alemán, asimismo, en volumen 1 del núm. 146.
146. —: *Schriften*, Frankfurt a.M., vol. 1 (Tractatus logico-philosophicus, Tagebücher 1914-1916, Philosophische Untersuchungen), 1960; vol. 2 (Philosophische Bemerkungen, aus dem Nachlass herausg, v. R. Rhees), 1964; volumen 3 (Wittgenstein und der Wiener Kreis, von Friedrich Waismann. Aus dem Nachlass herausg. v. B. F. McGuinness), 1967.
147. —: *Notebooks 1914-1916* (ed. por R. Rhees y G. H. von Wright, con traducción inglesa de G. E. M. Anscombe), Oxford, 1961. Texto alemán, asimismo, en vol. 1 del núm. 146.
148. ZOCHER, R.: *Die objektive Geltungslogik und der Immanenzgedanke. Eine erkenntnistheoretische Studie zum Problem des Sinnes*, Tübingen, 1925 (Habilitationsschrift, Erlangen).